საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

პროფესორ ალექსი გორგიძის სახელობის მექანიკის

სამეცნიერო–სასწავლო ლაბორატორია

ლაბორატორიული სამუშაო №5

ვარიანტი №

ჯგუფი №

სტუდენტი:

ხელმძღვანელი:

თარიღი:

თბილისი – 2018

ბმული სისტემების რხევების შესწავლა

სამუშაოს მიზანი: ბმული სისტემების რხევების თავისებურებების და ძირითადი მახასიათებლების შესწავლა.

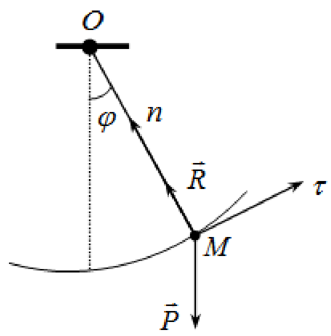
ამოცანა: ორი ბმული ქანქარის თანაფაზური და ფაზასაწინააღმდეგო რხევების პერიოდის და ბიძგების პერიოდის განსაზღვრა.

ხელსაწყოები და საკუთროებები: ხელსაწყო FPM-13, არათავისუფალი სისტემების რხევების გამოსაკვლევად; წამზომი(ბიძგების პერიოდის გასაზომად).

თეორიული ნაწილი

მათემატიკური ქანქარა ეწოდება ისეთ ნივთიერ წერტილს, რომელიც დაკიდებულია უჭიმადი და უწონადი ძაფის საშუალებით უძრავ წერტილზე და მოძრაობს სიმძიმის ძალის მომედებით ვერტიკალურ სიბრტყეში.

განვიხილოთ მათემატიკური ქანქარა, რომელიც წარმოადგენს $OM = l$ სიგრძის ერთ ბოლოში დაკიდებულ P წონის M ნივთიერ წერტილს, რომლის მეორე ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული O წერტილში. ამ ნივთიერ წერტილს შეუძლია შეასრულოს არათავისუფალი მოძრაობა l რადიუსის წრეწირის რკალზე. l სიდიდეს ეწოდება ქანქარას სიგრძე. ძაფის წონა უგულებელყოფილია.



ნახ. 1

გადავხაროთ M წერტილი ვერტიკალური მდებარეობიდან რაიმე φ კუთხით. ამ კუთხეს გადახრის კუთხე ეწოდება და განსაზღვრავს ქანქარის ყოველ მდებარეობას. შევადგინოთ M წერტილის მოძრაობის განტოლება. M წერტილზე მოქმედებს $\vec{P}$ სიმძიმის და $\vec{R}$ რეაქციის ძალები. M წერტილის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{R}. \qquad (1)$$

გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ბუნებრივ კოორდინატებში და დავაგეგმილოთ წინა ტოლობა M წერტილის ტრაექტორიის მხებზე და მთავარ ნორმალზე. მივიღებთ:

$$\begin{cases} m\dfrac{d\upsilon}{dt} = -mg\sin\varphi, \\ m\dfrac{\upsilon^2}{l} = -mg\cos\varphi + R. \end{cases} \qquad (2)$$

მესამე განტოლება აღარ გვექნება, რადგან ის გადაიქცევა იგივეობად $0=0$. M წერტილის მოძრაობა ხდება l რადიუსის წრეწირის რკალზე, ამიტომ $s = l\varphi$. შესაბამისად გვექნება

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{d\upsilon}{dt} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (2) სისტემის პირველ განტოლებაში. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

ეს განტოლება გამოსახავს M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას. ამ განტოლების ამოხსნა მოითხოვს ელიფსური ფუნქციების ცოდნას. ჩვენ დავკმაყოფილდებით

მცირე რხევებით. ამიტომ მივიღოთ, რომ $\sin\varphi \approx \varphi$, ე.ი განვიხილოთ ისეთი გადახრები, როცა შესაძლებელია $\sin\varphi$–ს შეცვლა φ არგუმენტით. თუ ამასთანავე შემოვიღებთ აღნიშვნას $\frac{g}{l} = \omega_1^2$, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_1^2\varphi = 0 .$$

ეს განტოლება წარმოადგენს ჰარმონიული რხევის დიფერენციალურ განტოლებას. ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_1 t + \alpha) ,$$

სადაც φ_0 და α ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით. φ_0 აღნიშნავს რხევის ამპლიტუდას, ხოლო α – რხევის საწყის ფაზას. რხევის პერიოდი და სიხშირე განისაზღვრებიან შემდეგი ტოლობებით

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} , \tag{3}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} . \tag{4}$$

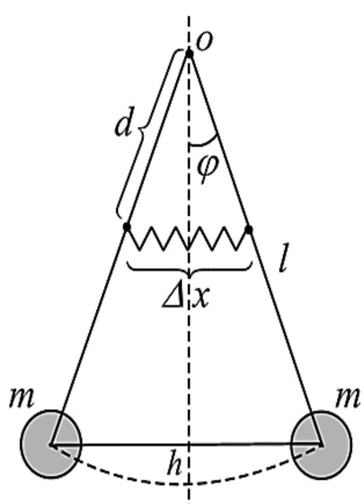
აქ g - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა.

(2) სისტემის მეორე განტოლებიდან განისაზღვრება უცნობი რეაქციის ძალა. მართლაც

$$R = m\left(\frac{\upsilon^2}{l} + g\cos\varphi\right) = m\left[l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\cos\varphi\right].$$

ბმული რხევითი სისტემა – ეს არის ორი ან რამდენიმე ქანქარას ერთობლიობა, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია მსუბუქი დრეკადი შემაერთებელით.

თანაფაზური და ფაზასაწინააღმდეგო რხევები. მე- 2 – ნახაზზე გამოსახული ქანქარებიდან თითოეული მათგანი წარმაოადგენს წვრილ მსუბუქ ღეროს, რომლის ერთი ბოლო უძრავადაა დამაგრებული, ხოლო მეორე ბოლოზე მიმაგრებულია m – მასის მასიური ტვირთი. ეს ქანქარები თავისი თვისებებით ახლოა მათემატიკურ ქანქარასთან. ქანქარები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან k სიხისტის მქონე მსუბუქი (უწონადი) ზამბარით.



ნახ. 2

გადავხაროთ ორივე ქანქარა ერთ მხარეს ერთი და იგივე კუთხით. რამდენადაც ქანქარები იგივურია და დრეკადი კავშირი მათ შორის პრაქტიკულად არ მოქმედებს, ამიტომ ისინი შეასრულებენ რხევებს ერთნაირად. ასეთ რხევებზე ამბობენ, რომ ისინი თანაფაზურია. ცხადია, რომ თითოეული ქანქარის თანაფაზური რხევების პერიოდი და სიხშირე ისეთივეა, თითქოს იგი არ იყოს დაკავშირებული მეორე ქანქარასთან. ამ პერიოდის და სიხშირის საპოვნელად შეიძლება ვისარგებლოთ იმ ცნობილი ფორმულებით, რომლებიც ზემოთ გვაქვს მიღებული

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} , \qquad \nu_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} ,. \tag{5}$$

ახლა გადავხაროთ ქანქარები ერთი და იგივე კუთხით, მაგრამ სხვადასხვა მხარეს. ამ შემთხვევაში ქანქარები შეასრულებენ რხევებს სარკისებური სიმეტრიით. ასეთ რხევებს უწოდებენ ფაზასაწინააღმდეგო რხევებს. გამოვთვალოთ ფაზასაწინააღმდეგო რხევების T_2 პერიოდი და ν_2 სიხშირე.

თუ უგულვებელყოფთ ენერგიის დანაკარგს ხახუნის, ჰაერის წინააღმდეგობის და ა.შ. ხარჯზე, მაშინ ენერგიის მუდმივობის კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$E_კ + U_პ + U_დ = const\ ,$$

სადაც $E_კ$ – მერხევი ტვირთების კინეტიკური ენერგიაა, $U_პ$ – მერხევი ტვირთების პოტენციალური ენერგია, ხოლო $U_დ$ - -ზამბარის ანუ დრეკადი კავშირის პოტენციალური ენერგია. გვაქვს:

$$E_კ = 2\frac{J\dot{\varphi}^2}{2} = J\dot{\varphi}^2\ , \tag{6}$$

სადაც $J = ml^2$ – ერთერთი ქანქარის ინერციის მომენტია, $\dot{\varphi}$ - ქანქარის კუთხური სიჩქარეა.

$$U_პ = 2mgh\ , \tag{7}$$

სადაც h – ქანქარის აწევის სიმაღლეა.

$$U_დ = k\frac{(\Delta x)^2}{2} \tag{8}$$

$$h = l(1-\cos\varphi) = 2l\sin^2\frac{\varphi}{2}\ , \tag{9}$$

სადაც l –არის მანძილი ქანქარის დაკიდების წერტილიდან ბირთვის ცენტრამდე, φ –ქანქარის წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრის კუთხეა.

$$\Delta x = 2d\sin\varphi \tag{10}$$

აქ d – არის მანძილი დაკიდების წერტილიდან ქანქარის ზამბარასთან მიერთების წერტილამდე.

თუ (9) და (10)–ს ჩავსვამთ (7) და (8)–ში და ჩავთვლით, რომ საქმე გვაქვს მცირე რხევებთან ($\sin\varphi \approx \varphi$), მაშინ ენერგიის მუდმივობის კანონიდან მივიღებთ:

$$ml^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mgl\varphi^2 + 2kd^2\varphi^2 = const.\ .$$

თუ ამ ტოლობას გავაწარმოებთ ერთხელ დროთი, მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + \omega_2^2\varphi = 0\ , \tag{11}$$

სადაც

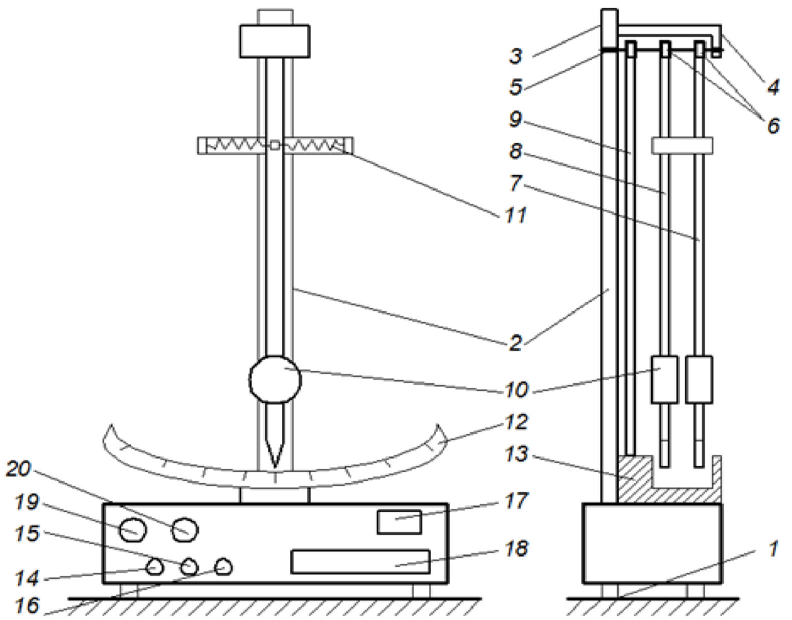
$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}\ . \tag{12}$$

(11) განტოლება წარმოადგენს ჰარმონიული რხევის განტოლებას ω_2 კუთხური სიხშირით. რხევის პერიოდი და რხევის სიხშირე გამოითვლება შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}}}\ , \quad \nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}}\ . \tag{13}$$

დანადგარის აღწერა და გაზომვის მეთოდი. ხელსაწყოს FPM-13–ის საერთო სახე მოცემულია მე–3 ნახაზზე. ფუძე (1) აღჭურვილია რეგულირებადი ფეხებით, რომლებიც უზრუნველყოფენ

ხელსაწყოს გასწორებას. ფუძეში ჩამაგრებულია სვეტი (2). მასზე დამაგრებულია (3) მილისი და კრონშტეინი (4). მილისის ღერძზე (5) მოთავსებულია სამი საკიდარი, რომლებზეც ბურთულ-საკისარებით ჩამოკიდებულია ქანქარები (7,8) და ღერო (9). ამ ღეროს დანიშნულებაა რხევების გამოწვევა და მოცემულ სამუშაოში ის არ გამოიყენება. ქანქარების გასწვრივ შეიძლება გადაადგილდეს და დაფიქსირდეს ტვირთი (10) საჭირო მდგომარეობაში. ქანქარები ერთმანეთთან შეუღლებულია ორი ზამბარის (11) საშუალებით, რომლებიც დამაგრებულია C ფორმის გარსაკარში, რომლის გადაადგილება შესაძლებელია ქანქარების ღერძის გასწვრივ. ქვედა კრონშტეინთან მიმაგრებულია კუთხური სკალა (12), რომლის საშუალებით განისაზღვრება ქანქარების რხევის ამპლიტუდა. მართვის და გაზომვის ბლოკის ნაპირის პანელზე მოთავსებულია: კლავიში (14) „ქსელი“, ხელსაწყოს ქსელში ჩასართავად; კლავიში (15) „ჩამოყრა“ გაზომვის ბლოკის სქემის ჩამოსაყრელად; კლავიში (16) „სდექ“ , რომელზეც თითის დაჭერით ვაჩერებთ გაზომვის პროცეს; სახელურები (19, 20) გათვალისწინებულია იძულებითი რხევების გამოსაწვევად და ამ სამუშაოში არ გამოიყენება.



ნახ. 3. ხელსაწყო FPM-13
ა) ხედი წინიდან; ბ) ხედი გვერდიდან

თანაფაზურ რხევებზე (ნორმალური რხევები ω_1 – სიხშირით) დაკვირვების მიზნით ბმულ ქანქარებს გადახრიან ცალ მხარეს $5^\circ - 7^\circ$ კუთხით და უშვებენ.

ფაზასაწინააღმდეგო რხევებზე (ნორმალური რხევები ω_2 – სიხშირით) დაკვირვების მიზნით ბმულ ქანქარებს გადახრიან ურთიერთსაწინააღმეგოდ ერთნაირი $5^\circ - 7^\circ$ კუთხით და უშვებენ. ორივე შემთხვევაში რხევების პერიოდი და სიხშირე გამოითვლება ფორმულებით:

$$T = \frac{1}{n}, \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} \tag{14}$$

სადაც n – რხევის პერიოდთა რაოდენობაა, t – გაზომვის ხანგძლივობა. n და t სიდიდეების მნიშვნელობები განისაზღვრება ფოტოელექტრული გადამწოდის (13) საშუალებით და ფიქსირდება უნივერსალური მილიწამზომის ინდიკატორით (17–18).

(14) ფორმულით მოცემული რიცხვითი გამოთვლების გასმარტივებლად, შევარჩიოთ დროის ის ხანგრძლივობა, რომლის დროსაც რხევათა რიცხვი $n = 10$.

ფოტოელექტრული გადამწოდის მუშაობის პრინციპი ემყარება ერთ–ერთი ქანქარის ღეროთი სინათლის ნაკადის პერიოდულ შეწყვეტას, ნაკადისა, რომელიც ეცემა ნათურიდან

ფოტორეზისტორს. ამის შემდეგ წრედში წარმოიქმნება ელექტრული იმპულსები, რომლებიც გაძლიერების შემდეგ მიეწოდება უნივერსალურ მილიწამზომის შესასვლელს.

სამუშაოს შესრულების თანამიმდევრობა.

თავდაპირველად აუცილებელია დავრწმუნდეთ, რომ ქანქარების დამამაგრებელი გარსაკირები დაყენებულია ქანქარების ზედა ნაწილში საკიდარების მახლობლად, ტვირთები კი დამაგრებულია ღეროების ქვედა ნაწილში ორივე ქანქარას საკიდარებიდან ერთნაირ მანძილზე. ეს ორი ფაქტორი „მაღალი ზამბარა და დაბალი ტვირთები“ უზრუნველყოფს ქანქარებს შორის სუსტ კავშირს.

1) დააჭირეთ კლავიშს „ქსელი“. შეამოწმეთ, რომ გაზომვის ყველა ინდიკატორი აჩვენებს ნულს და ანთია ფოტოელექტრული გადამწოდის ნათურა.

2) გადახარეთ ორივე ქანქარა ერთ მხარეს ერთი და იგივე კუთით ($5^\circ - 7^\circ$) და გაუშვით. დააჭირეთ კლავიშს „ჩამოყრა“.

3) ციფრი „ნულის“ გამოჩენის შემდეგ რხევების პერიოდის საინდიკატორო ველზე დააჭირეთ კლავიშს „გაჩერება“, მაშინ გაზომვების შეჩერების მომენტში დარეგისტრირდება რხევების რიცხვი $n = 10$, ხოლო მეორე საინდიკატორო ველზე დაფიქსირდება ამ რხევების ხანგრძლივობა t .

4) გამოთვალეთ თანაფაზური რხევების T_1 პერიოდი და რხევის სიხშირე (14) ფორმულით და შემდეგ შეიტანეთ ცხრილში.

5) ჩაატარეთ იგივე ცდები ოთხჯერ და შედეგები შეიტანეთ ცხრილში.

6) ანალოგიურად ტარდება ფაზასაწინააღმდეგო რხევების T_2 პერიოდის და რხევის სიხშირის გაზომვა. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ქანქარების საწყისი გადახრა ხდება ურთიერთ საწინაღმდეგო მხარეებზე ($5^\circ - 7^\circ$) – ით. შედეგი ასევე შეაქვთ ცხრილში.

7) კლავიშის „ქსელი“ დაჭერით გამორთეთ მკვებავი ძაბვა.

8) გამოთვალეთ T_1 , T_2 და ν_1 , ν_2 სიდიდეების გაზომვის აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილობები. შედეგები შეიტანეთ ცხრილში.

$$\Delta T_1 = \frac{T_1 - T_{1\text{ექს}}}{T_1} \times 100\,\% , \quad \Delta T_2 = \frac{T_2 - T_{2\text{ექს}}}{T_2} \times 100\,\% ,$$

$$\Delta \nu_1 = \frac{\nu_1 - \nu_{1\text{ექს}}}{\nu_1} \times 100\,\% , \quad \Delta \nu_2 = \frac{\nu_2 - \nu_{2\text{ექს}}}{\nu_2} \times 100\,\% .$$

საკონტროლო კითხვები

1. რას ეწოდება მათემატიკური ქანქარა?

2. როგორია მისი რხევის დიფერენციალური განტოლება?

3. პირდაპირი ჩასმით დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ამონახსნი არის შესაბამისი განტოლების ამონახსნი.

4. რას უდრის რხევის პერიოდი? რხევის სიხშირე?

5. როგორ რხევით სისტემას ეწოდება ბმული სისტემა? მოიყვანეთ მაგალითები.

6. რატომ არ ითვლება ჰარმონიული რხევად თითოეული ქანქარის მოძრაობა?

7. როგორ რხევებს ეწოდება თანაფაზური? ფაზასაწინააღმდეგო?

8. რას უდრის რხევის პერიოდი და რხევის სიხშირე თანაფაზური რხევის დროს?

9. რას უდრის რხევის პერიოდი და რხევის სიხშირე ფაზასაწინააღმდეგო რხევის დროს?

10. ქანქარებს შორის როგორ კავშირს ეწოდება სუსტი? როგორია სუსტი კავშირის მიახლოების გამოყენების პირობები?

11. შეეცადეთ ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის ზოგადი განტოლების საფუძველზე რხევითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების მიღება, რომელიც აღწერს ქანქარის მცირე რხევას.

ცხრილი 1

m	ℓ	d	k	n	t_1	t_2

ცხრილი 2

№	$T_{1თ}$	$T_{1ე}$	ΔT_1	$T_{2თ}$	$T_{2ე}$	ΔT_2	$\nu_{1თ}$	$\nu_{1ე}$	$\Delta \nu_1$	$\nu_{2თ}$	$\nu_{2ე}$	$\Delta \nu_2$
1												
2												