ირაკლი გორჯოლაძე, დავით გორგიძე,

ლევან ჯიქიძე, გურამ ბაღათურია

თ ე ო რ ი უ ლ ი   მ ე ქ ნ ი კ ა

(კინემატიკა)

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი 2013

უაკ 621.01

მოცემულია თეორიული მასალა და ამოცანების ამოხსნის მეთოდიკა (ტიპი-ური ამოცანების დაწვრილებითი ამოხსნის თანხლებით), რომლის ათვისება დაეხ-მარება სტუდენტებს თეორიული მასალის ღრმად გაგებასა და ათვისებაში.

განკუთვნილია საქართველის ტექნიკური უნივერსიტეტის ბაკალავრიატის და უმაღლესი ტექნიკური განათლების სტუდენტბისათვის. ცხადია, შეუძლიათ გამოიყენებენ საქართველოს სხვა უმაღლესი სასწავლებლის სტუდენტებმაც, რომ-ლებიც ეუფლებიან ტექნიკურ სპეციალობებს.

კინემატიკა

VII თავი

სივრცე და დრო. ათვლის სისტემები.

კინემატიკის ამოცანები

კინემატიკა შეისწავლის სხეულის მოძრაობის გეომეტრიულ თვისებებს მასისა და მოქმედი ძალების გარეშე. როგორც მექანიკის დამოუკიდებელი ნაწილი, იგი გამოყო **ამპერმა** 1834 წელს.

7.1. სივრცე და დრო. ათვლის სისტემა

სივრცე. კლასიკურ მექანიკაში სივრცე, რომელშიც სხეული მოძრაობს, განიხილება როგორც უსასრულო, ერთგვაროვანი, იზოტროპული და მოძრავი სხეულისაგან დამოუკიდებელი. ასეთი თვისებების მქონე სივრცეში სხეულის გადაადგილებას ვერ შევნიშნავთ. იმისათვის, რომ სხეულის მდებარეობის შეცვლა (ანუ მოძრაობა) აღმოვაჩინოთ, უნდა არსებობდეს მეორე სხეული, რომლის მიმართაც მოცემული სხეული ან იცვლის მდებარეობას ან არა.

სხეულს, რომლის მიმართაც განიხილება მოცემული სხეულის მოძრაობა, **ათვლის** ან **საფარდი სხეული** ეწოდება.

ათვლის სხეულთან მკვიდრად ვაკავშირებთ კოორდინატთა ღერძებს, რაც საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ სივრცის არითმეტიზაცია რიცხვების მეშვეობით და მოძრაობის შესასწავლად გამოვიყენოთ მათემატიკა.

საერთაშორისო ერთეულთა სისტემაში სიგრძის ძირითადი ერთეულია 1 მ და მისი განზომილება აღინიშნება L სიმბოლოთი. აქედან გამომდინარეობს, რომ სივრცის ერთეულია 1 მ^3, ხოლო განზომილება - L^3.

დრო. კლასიკურ მექანიკაში მიღებულია, რომ დრო არ არის დამოკიდებული სხეულის მოძრაობაზე და ყველა კოორდინატთა სისტემაში ერთნაირად მიმდინარეობს.

დროის ერთეულად მიღებულია 1 წმ, განზომილება აღინიშნება T სიმბოლოთი.

დრო აითვლება იმ მომენტიდან, რომლიდანაც ვიწყებთ მოძრაობის შესწავლას. მანამდე დრო ითვლება უარყოფთად. ყოველი მოცემული t დროის მომენტი განისაზღვრება წამების რიცხვით, რომელიც გავლილია ათვლის საწყისი მომენტიდან მოცემულ მომენტამდე. ორ ნებისმიერ მომდევნო დროის მომენტს შორის სხვაობას **დროის შუალედი** ეწოდება.

კინემატიკის ამოცანებში t დრო მიღებულია დამოუკიდებელ სიდიდედ (არგუმენტად). ყველა დანარჩენი სიდიდე (მანძილი, სიჩქარე და ა.შ.) განიხილება, როგორც დროის ფუნქცია.

7.2. ინერციული და არაინერციული ათვლის სისტემები.

სხეულის მოძრაობის ხასიათი (სახე) დამოკიდებულია ათვლის სხეულის არჩევაზე: ერთი და იგივე მოძრაობა სხვადასხვა დამკვირვებელს, რომლებიც უძრავად იმყოფებიან ერთმანეთის მიმართ მოძრავ ათვლის სხეულებზე, საზოგადოდ, სხვადასხვაგვარად მოეჩვენებათ. მაგალითად, თუ ერთი დამკვირვებლისთვის მოძრაობა წრფივია, მეორესთვის შეიძლება მრუდწირული იყოს. ბუნებრივია შევეცადოთ ავირჩიოთ ისეთი ათვლის სისტემა, რომლის მიმართ მოძრაობის კანონებს უმარტივესი სახე ექნება. ირკვევა, რომ ასეთია აბსოლუტურად უძრავი კოორდინატთა სისტემა, რომლის მიმართაც მართებულია ინერციის კანონი (იგივე ნიუტონის პირველი კანონი). ასეთ სისტემას **ინერციული** ეწოდება. ათვლის სისტემას, რომლის მიმართაც ადგილი არა აქვს ინერციის კანონს, **არაინერციული** ეწოდება.

ირკვევა, რომ აბსოლუტურად უძრავი ათვლის სისტემა (ე.ი. ინერციული სისტემა) ბუნებაში არ არსებობს. თუმცა, არსებობს ისეთი ათვლის სისტემები, რომლებიც დიდი სიზუსტით შეგვიძლია ჩავთვალოთ ინერციულ სისტემად. ასეთი სისტემის მაგალითებია: დედამიწასთან უძრავად დაკავშირებული ათვლის სისტემა, მზის ცენტრსა და ე.წ. სამ უძრავ ვარსკვლავზე გამავალი ათვლის სისტემა და ა.შ.

მტკიცდება, რომ ყოველი ათვლის სისტემა, რომელიც ინერციით მოძრაობს ინერციული სისტემის მიმართ, ასევე წარმოადგენს ინერციულ სისტემას.

7.3. კინემატიკის ამოცანები

კინემატიკის **პირველ ამოცანას** წარმოადგენს სხეულის (წერტილის) მდებარეობის მოცემის ხერხების (წესების) დადგენა.

კინემატიკის **მეორე ამოცანაა** სხეულის (წერტილის) მოცემული მოძრაობის კანონის მიხედვით დავადგინოთ ამ მოძრაობის კინემატიკური მახასიათებლების (ტრაექტორია, წერტილის სიჩქარე და აჩქარება, სხეულის კუთხური სიჩქარე და აჩ-ქარება და სხვ.) განსაზღვრის მეთოდები.

კინემატიკა პირობითად იყოფა ორ ნაწილად: წერტილისა და სხეულის კინემატიკა.

წერტილის კინემატიკა მექანიკის ამ ნაწილის ყველაზე მარტივი ნაწილია. წერტილის მექანიკური მოძრაობა, განსაზღვრის თანახმად, დროში მისი მდებარეობის შეცვლაა ათვლის სისტემის მიმართ. აქედან, ცხადია, რომ წერტილის მოძრაობის საცოდნელად საკმარისია ვიცოდეთ მისი მდებარეობა მოცემულ მომენტში და მითითება იმაზე, თუ როგორ იცვლება ეს მდებარეობა დროის მიხედვით.

დავიწყოთ წერტილის მოძრაობის შესწავლით.

მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ერთხელ კიდევ შევეხოთ მოძრაობისა და უძრაობის ცნებებს. თუ წერტილი (სხეული) მდებარეობას არ იცვლის აღებული კოორდინატთა სისტემის მიმართ, მაშინ ვამბობთ, რომ წერტილი უძრავია. რადგანაც წერტილის მოძრაობა და უძრაობა განიხილება მხოლოდ არჩეულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც თავის მხრივ შეიძლება ნებისმიერად გადაადგილდებოდეს,

ამიტომ ცნებები 2მოძრაობა3 და 2უძრაობა3 ფარდობითი ცნებებია. შემდგომში, თუ სპეციალურად არ იქნება აღნიშნული, 2უძრავი კოორდინატთა სისტემა3 გამონათქვამის ქვეშ ვიგულისხმებთ უძრავ ღერძთა სისტემას, რომლის მიმართაც განიხილება მოძრაობა.

VIII თავი

წერტილის კინემატიკა

8.1. წერტილის მოძრაობის მოცემის ხერხები

ვიწყებთ წერტილის კინემატიკის შესწავლას. თუ მოცემულია ხერხი (წესი), რომელიც საშუალებას გვაძლევს დროის ნებისმიერი მომენტში მოცემული კოორდინატთა სისტემის მიმართ განვსაზღვროთ წერტილის მდებარეობა (ანუ გავიგოთ წერტილის მოძრაობა), მაშინ ვამბობთ, რომ წერტილი **მოცემულია კინემატიკურად**.

წერტილის მდებარეობის (მოძრაობის) მოსაცემად ძირითადად გამოიყენება შემდეგი სამი ხერხი: კოორდინატული (გეგმილების), ბუნებრივი (ტრაექტორული) და ვექტორული. გავეცნოთ სამივე ხერხს.

1. მოძრაობის მოცემის კოორდინატული (გეგმილების) ხერხი.

ვთქვათ, რაიმე M წერტილის მოძრაობას შევისწავლით დეკარტის მართკუთხა $Oxyz$ კოოორდინატთა სისტემის მიმართ (ნახ. 8.1). ცხადია, მოძრაობისას მისი x, y, z კოორდინატები იცვლება, ე.ი. ეს სიდიდეები დროის ფუნქციებია.

დავუშვათ, რომ

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t),\ \ z = f_3(t). \tag{8.1.1}$$

თუ ვიცით f_1, f_2, f_3 ფუნქციები, მაშინ დროის ნებისმიერ მომენტში შეგვიძლია გავიგოთ წერტილის მდებარეობა სივრცეში, ამიტომ (8.1.1) ტოლობებს **წერტილის მოძრაობის განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში,** ასევე, **წერტილის მოძრაობის კანონი** ეწოდება. ჩვენს მიერ განხილული მოძრაობებისათვის f_1, f_2, f_3 ცალსახა, სასრული და უწყვეტი ფუნქციებია თავისი მეორე რიგის წარმოებულებით მაინც.

მათემატიკის თვალსაზრისით (8.1.1) განტოლებები იმ მრუდის პარამეტრული განტოლებებია, რომელსაც წერტილი აღწერს სივრცეში და, რომელსაც **წერტილის ტრაექტორია** ეწოდება. ამ განტოლებებში პარამეტრის როლს ასრულებს t დრო. იმისათვის, რომ მივიღოთ ტრაექტორიის განტოლებები კოორდინატული ფორმით, საჭიროა (8.1.1) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტერი.

ხშირად წერტილი აღწერს არა მთელ მრუდს, არამედ მის ნაწილს, ამიტომ საჭიროა დავადგინოთ კოორდინატების ცვლილების საზღვრები მოცემულ დროის შუალედში.

როდესაც წერტილი მოძრაობს რაიმე სიბრტყეში, მაგალითად, Oxy სიბრტყეში, მაშინ (8.1.1) განტოლებებიდან გვექნება მხოლოდ ორი:

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t). \tag{8.1.2}$$

როდესაც წერტილი მოძრაობს რაიმე წრფეზე, მაგალითად, Ox წრფეზე, მაშინ (8.1.1) განტოლებებიდან გვექნება მხოლოდ ერთი:

$$x = f(t). \tag{8.1.3}$$

აღსანიშნავია, რომ წერტილის მოძრაობა შეგვიძლია აღვწეროთ სხვა კოორ-დინატებითაც (ცილინდრული კოორდინატებით, სფერული კოორდინატებით და სხვ.).

2. მოძრაობის მოცემის ბუნებრივი (ტრაექტორული) ხერხი.

ვთქვათ, AB მრუდი არის წერტილის ტრაექტორია (ნახ. 8.2), რომლის განტო-ლებები ზოგადი სახით მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0. \tag{8.1.4}$$

(8.1.4)-ის თითოეული განტოლება სივრცეში განსაზღვრავს ზედაპირს, რომელთა თანკვეთა არის წერტილის ტრაექტორია. როცა ზედაპირები სიბრტყეებია, მაშინ ტრაექტორია წრფეა, ხოლო, როცა ამ ორი ზედაპირიდან ერთ-ერთი სიბრტყეა, მაშინ ტრაექტორია ბრტყელი წირია. ტრაექტორიაზე ათვლის წერტილად ავირჩიოთ რაიმე M_o წერტილი და დავადგინოთ მის გასწვრივ მოძრაობის დადებითი მიმართულება. მანძილი M_o ათვლის წერტილიდან მოძრავ M წერტილამდე აღვნიშნოთ s ასოთი, მაშინ $s = M_oM$ მრუდწირული კოორდინატი ცალსახად განსაზღვრავს M წერტილის მდებარეობას ტრაექტორიზე.

ტრაექტორიის გასწვრივ წერტილმა შეიძლება იმოძრავოს სხვადასხვა კანონით. ვთქვათ,

$$s = f(t). \tag{8.1.5}$$

(8.1.5) და (8.1.4) განტოლებებით (ეს უკანასკნელნი არ უნდა შეიცავდნენ t პა-რამეტრს) წერტილის მდებარეობის მოცემას **წერტილის მდებარეობის მოცემის ბუნებრივი (ტრაექტორული) ხერხი** ეწოდება.

ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს: იმისათვის, რომ ვიცოდეთ წერ-ტილის მოძრაობა ბუნებრივი ხერხით, საჭიროა ვიცოდეთ: 1. ტრაექტორია; 2. ტრა-ექტორიაზე ათვლის წერტილი და დადებითი მიმართულება; 3. ტრაექტორიის გასწ-ვრივ $s = f(t)$ წერტილის მოძრაობის კანონი.

ხაზგასმით აღვნიშნავთ, რომ (8.1.6) განტოლებაში s სიდიდე განსაზღვრავს მოძრავი წერტილის მდებარეობას, ე.ი. წარმოადგენს მის მრუდწირულ კოორდინატს, და არა მის მიერ გავლილ მანძილს. მაგალითად, თუ მოძრავი წერტილი M_o მდე-ბარეობიდან მივიდა M_1 წერტილში და დაბრუნდა უკან M წერტილში (ნახ.8.2), მა-შინ $s = OM$ გამოხატავს მრუდწირულ კოორდინატს, ხოლო მის მიერ გავლილი მან-ძილი იქნება $M_oM + M_1M$, რაც $s = OM$ -ის ტოლი არ არის.

3. მოძრაობის მოცემის ვექტორული ხერხი

$Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ M წერტილის $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორი აღვნიშნოთ $\vec{r}$-ით (ნახ. 8.1). M წერტილის მოძრაობისას $\vec{r}$ ვექტორი იცვლება დროის მიხედვით, ამიტომ იგი წარმოადგენს ცვლად ვექტორს, დამოკიდებულს t არგუმენტზე. ვთქვათ:

$$\vec{r}=\vec{r}\left(t\right). \tag{8.1.6}$$

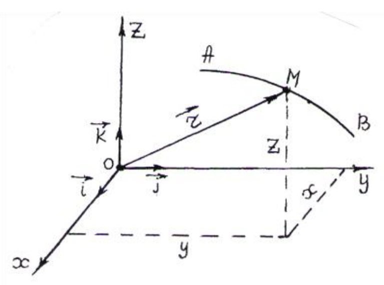
როდესაც ვიცით $\vec{r}\left(t\right)$ ფუნქცია, მაშინ დროის ნებისმიერი მომენტისათვის ავაგებთ $\vec{r}$ ვექტორს და მისი ბოლო წერტილი იქნება ჩვენი M წერტილი. აქედან გამომდინარეობს, რომ (8.1.6) ტოლობა განსაზღვრავს M წერტილის მოძრაობის კანონს. (8.1.6) ტოლობას ეწოდება **წერტილის მოძრაობის ვექტორული განტოლება** ან **წერტილის მოძრაობის კანონი ვექტორული ფორმით.**

$\vec{r}$ ვექტორის ბოლო წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელსაც ამ ვექტორის **ჰოდოგრაფი** ეწოდება, წარმოადგენს M წერტილის **ტრაექტორიას.** ამგვარად, წერტილის ტრაექტორია არის უწყვეტი წირი, რომელსაც იგი აღწერს მოცემულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. თუ ტრაექტორია წრფეა, მაშინ მოძრაობას ეწოდება **წრფივი**, ხოლო თუ **მრუდია – მრუდწირული.**

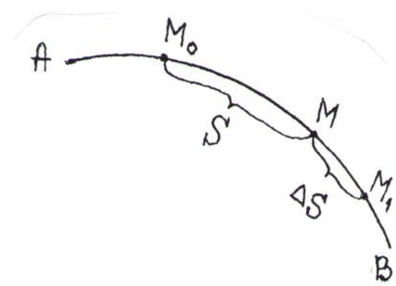
თუ M წერტილის კოორდინატებს (ან რაც იგივეა - $\vec{r}$ ვექტორის გეგმილებს) აღვნიშნავთ x, y, z-ით, მაშინ

$$\vec{r}=\vec{i}\,x+\vec{j}\,y+\vec{k}\,z\,, \tag{8.1.7}$$

სადაც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ კოორდინატთა ღერძების ერთეულოვანი ვექტორებია (ორტები).



ნახ. 8.1



ნახ. 8.2

ზოგჯერ წერტილის მოძრაობა მოცემულია კოორდინატული სახით (ფორმით) და გვინდა გავიგოთ რიგორც ტრაექტორიის განტოლება, ასევე ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის განტოლება. ამისათვის უნდა გავადიფერენციალოთ წერტილის (8.1.1) მოძრაობის განტოლებები, ჩაწერილი მართკუთხა კოორდინატებში, ე.ი. უნდა გავიგოთ dx, dy, dz და შევიტანოთ მათემატიკიდან ცნობილ რკალის ელემენტის სიგრძის განმსაზღვრელ

$$ds=\sqrt{\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2+\left(dz\right)^2} \tag{8.1.8}$$

ფორმულაში და მოვახდინოთ ამ განტოლების ინტეგრირება.

8.2. წერტილის ვექტორული სიჩქარე

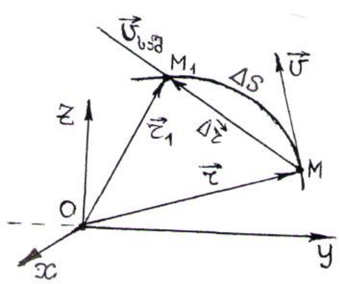
დავიწყოთ კინემატიკის მეორე ამოცანის შესწავლა. განვსაზღვროთ ერთ-ერთი ძირითადი კინემატიკური მახასიათებელი – წერტილის ვექტორული სიჩქარე.

ვთქვათ, დროის t და t_1 მომენტებში მოძრავი წერტილი იმყოფება შესაბამისად M და M_1 მდებარეობებში, რომელთა რადიუს-ვექტორებია $\vec{r}$ და $\vec{r}_1$ (ნახ.8.3). განვიხილოთ $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{MM_1} = \vec{r} - \vec{r}_1$ ვექტორი, რომელსაც $\Delta t = t - t_1$ დროის შუალედში M **წერტილის ვექტორული გადაადგილება** ეწოდება.

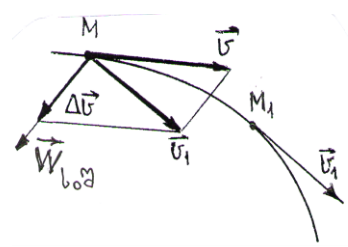
განსაზღვრა. ვექტორული გადაადგილების ფარდობას შესაბამის დროის შუალედთან წერტილის საშუალო ვექტორული სიჩქარე ეწოდება Δt დროის შუალედში. თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{v}_{საშ}$-თი, გვექნება:

$$\vec{v}_{საშ} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (8.2.1)$$

ცხადია, $\vec{v}_{საშ}$-ს აქვს $\Delta\vec{r}$ გადაადგილების მიმართულება (ვინაიდან Δt>0). მრუდწირული მოძრაობის დროს ის მიმართულია MM_1 ქორდის გასწვრივ წერტილის მოძრაობის მიმართულების თანხვედრილად, ხოლო წრფივი მოძრაობის დროს – ტრაექტორიის გასწვრივ. რასაკვირველიაია, რაც უფრო მცირეა Δt დროის შუალედი, $\vec{v}_{საშ}$ მით უფრო ზუსტად ახასიათებს წერტილის მოძრაობას.



ნახ. 8.3



ნახ. 8.4

განსაზღვრა. დროის მოცემულ მომენტში **წერტილის სიჩქარე (მყისი ვექტორული სიჩქარე)** ეწოდება $\vec{v}_{საშ}$ ვექტორის ზღვარს, როცა $\Delta t \to 0$. თუ ამ სიჩქარეს აღვნიშნავთ $\vec{v}$-თი, გვექნება:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{საშ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

ამგვარად,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (8.2.2)$$

მივიღეთ: წერტილის ვექტორული სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში ტოლია წერტილის რადიუს-ვექტორის პირველი რიგის წარმოებულისა დროით.

ადვილი მისახვედრია, რომ MM_1 მკვეთის ზღვარს, როცა $\Delta t \to 0$ (რაც იგივეა $M_1 \to M$), წარმოადგენს ტრაექტორიის მხებს M წერტილში. აქედან გამომდინარეობს, რომ **წერტილის სიჩქარის ვექტორი ტრაექტორიის მხებზე მდებარეობს** და მიმართულია მოძრაობის თანხვედრილად.

წრფივი მოძრაობის დროს სიჩქარის $\vec{v}$ ვექტორი ყოველთვის მიმართულია ამ წრფის გასწვრივ. მრუდწირული მოძრაობის დროს $\vec{v}$ ვექტორი მდებარეობს ტრაექტორიის მხებზე.

დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს წერტილის მოძრაობის განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \tag{8.1.1}$$

ავღნიშნოთ $\vec{v}$ სიჩქარის გეგმილები v_x, v_y, v_z-ით და (8.2.2) ფორმულა (8.1.7) ტოლობის გათვალისწინებით, გვაძლევს:

$$v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} = \frac{d}{dt}\left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}\right).$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ორტები მუდმივი ვექტორებია, ამიტომ გვექნება:

$$v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \quad \Rightarrow$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \; v_y = \frac{dy}{dt}, \; v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{8.2.3}$$

მივიღეთ: კოორდინატთა ღერძებზე წერტილის სიჩქარის გეგმილი ტოლია შესაბამისი კოორდინატის პირველი რიგის წარმოებულის დროით. აღვნიშნოთ $\vec{v}$ ვექტორის ფუძის მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილი კუთხეები α, β, γ-თი და გვექნება:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \; \cos\beta = \frac{v_y}{v}, \; \cos\gamma = \frac{v_z}{v}. \tag{8.2.4}$$

თუ მოძრაობა მიმდინარეობს Oxy სიბრტყეში, მაშინ

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \; \cos\beta = \frac{v_y}{v} \quad \text{ან} \quad tg\alpha = \frac{v_y}{v_x}. \tag{8.2.5}$$

თუ მოძრაობა მიმდინარეობს Ox ღერძის გასწვრივ, მაშინ

$$v = v_x = \frac{dx}{dt}. \tag{8.2.6}$$

საერთაშორისო ერთეულთა სისტემაში სიჩქარის ძირითადი ერთეულია 1 მ/წმ, განზომილება - $L/T = LT^{-1}$. ხშირად გამოიყენება სიჩქარის ერთეულები 1 სმ/წმ, 1 მ/წთ, 1 კმ/სთ.

8.3. წერტილის ვექტორული აჩქარება

ვაგრძელებთ კინემატიკის მეორე ამოცანის შესწავლას. წერტილის მოძრაობის ძირითად კინემიტიკურ მახასიათებელს წარმოადგენს წერტილის აჩქარებაც, რომე-ლიც ახასიათებს წერტილის სიჩქარის მოდულისა და მიმართულების ცვლილებას დროის მიხედვით.

ვთქვათ, დროის t მომენტში წერტილი იმყოფება M მდებარეობაში და აქვს $\vec{v}$ სიჩქარე, ხოლო t_1 მომენტში გადავიდა M_1 მდებარეობაში $\vec{v}_1$ სიჩქარით (ნახ. 8.4). დროის Δt შუალედში წერტილის სიჩქარე ღებულობს $\Delta\vec{v}=\vec{v}-\vec{v}_1$ ნაზრდს. M წერ-ტილში მოვდოთ $\vec{v}_1$-ის ტოლი $\vec{v}_1$ ვექტორი და დავშალოთ ის ორ შემდგენად, რომ-ელთაგან ერთ-ერთი იქნება $\vec{v}$ ვექტორი. მეორე შემდგენი აღვნიშნოთ $\Delta\vec{v}$-თი. ადვილი მისახვედრია, რომ $\Delta\vec{v}$ ვექტორი ყოველთვის მიმართულია ტრაექტორიის ჩაზნექი-ლობისაკენ.

$\Delta\vec{v}$-ს ფარდობას შესაბამის Δt-სთან, ვუწოდოთ წერტილის საშუალო ვექტო-რული აჩქარება და თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{w}_{\text{საშ}}$-თი, გვექნება:

$$\vec{w}_{\text{საშ}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,. \tag{8.3.1}$$

რასაკვირველია, $\vec{w}_{\text{საშ}}$-ს აქვს $\Delta\vec{v}$-ს მიმართულება.

განსაზღვრა. დროის მოცემულ მომენტში **წერტილის აჩქარება** (მყისი ვექტო-რული აჩქარება) ეწოდება საშუალო ვექტორული აჩქარების ზღვარს, როცა $\Delta t\to 0$. აღვნიშნოთ ეს აჩქარება $\vec{w}$-თი და გვექნება:

$$\vec{w}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}\,. \tag{8.3.2}$$

(8.2.2) ტოლობის გათვალისწინება გვაძლევს:

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,. \tag{8.3.3}$$

მივიღეთ: დროის მოცემულ მომენტში წერტილის ვექტორული აჩქარება ტოლია ვექტორული სიჩქარის პირველი რიგის წარმოებულის ან რადიუს-ვექტორის მეორე რიგის წარმოებულისა დროით.

საერთაშორისო ერთეულთა სისტემაში აჩქარების ძირითადი ერთეულია 1 მ/წმ^2, განზომილება - $L/T^2=LT^{-2}$.

წრფივი მოძრაობის დროს აჩქარების $\vec{w}$ ვექტორი მიმართულია იმ წრფის გასწვრივ, რომელზეც მოძრაობს წერტილი. თუ ტრაექტორია ბრტყელი მრუდია, მაშინ $\vec{w}$ ვექტორი მდებარეობს ამ მრუდის სიბრტყეში და მიმართულია მისი ჩაზ-ნექილობისკენ. როცა ტრაექტორია სივრცითი მრუდია, მაშინ $\vec{v}$ და $\vec{v}_1$ ვექტორების ფუძეები შეიძლება წარმოადგენდნენ აცდენილ წრფეებს და მათზე სიბრტყე ვერ გა-ვატაროთ. M წერტილში მოვდოთ $\vec{v}_1$-ის ტოლი $\vec{v}_1$ ვექტორი და $\vec{v}$ და $\vec{v}_1$ ვექტორების ფუძეებზე გავატაროთ სიბრტყე. როცა $\Delta t\to 0$, მაშინ ეს სიბრტყე იცვლის მდე-ბარეობას, თუმცა ყოველთვის გადის $\vec{v}$ ვექტორზე. როცა M_1 წერტილი მივა M წერტილში, ე.ი. Δt გახდება ნულის ტოლი, მაშინ ზემოხსენებული სიბრტყე დაიკავებს

რაღაც ზღვრულ მდებარეობას, რომელსაც **ტრაექტორიის მიმხებ სიბრტყეს** უწოდებენ. მივიღეთ, რომ წერტილის ვექტორული აჩქარების ვექტორი, ზოგად შემთხვევაში, მდებარეობს ტრაექტორიის მიმხებ სიბრტყეში და მიმართულია მრუდის ჩაზნექილობისკენ.

ავღნიშნოთ $\vec{w}$ აჩქარების გეგმილები w_x, w_y, w_z-ით. მაშინ და (8.3.3) ფორმულა ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k} = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \cdot \vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \quad =>$$

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \;\; w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \;\; w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (8.3.4)$$

მივიღეთ: წერტილის აჩქარების გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე ტოლია სიჩქარის შესაბამისი გეგმილის წარმოებულის ან შესაბამისი კოორდინატის მეორე რიგის წარმოებულისა დროით. $\vec{w}$ ვექტორის ფუძის მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილი კუთხეები აღვნიშნით $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$-ით და გვექნება:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2},$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{w_x}{w}, \;\; \cos\beta_1 = \frac{w_y}{w}, \;\; \cos\gamma_1 = \frac{w_z}{w}. \qquad (8.3.5)$$

თუ მოძრაობა მიმდინარეობს Oxy სიბრტყეში, მაშინ

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2},$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{w_x}{w}, \;\; \cos\beta_1 = \frac{w_y}{w} \quad \text{ან} \quad tg\alpha_1 = \frac{w_y}{w_x}. \qquad (8.3.6)$$

თუ მოძრაობა მიმდინარეობს Ox ღერძის გასწვრივ, მაშინ

$$w = w_x = \frac{dw_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (8.4.8)$$

8.4. ბუნებრივი ღერძები. წერტილის სკალარული სიჩქარე და აჩქარება

დავუშვათ, რომ წერტილის მოძრაობა მოცემულია ბუნებრივი სახით: ვიცით წერტილის ტრაექტორია და მის გასწვრივ წერტილის მოძრაობის განტოლება:

$$s = f(t). \qquad (8.4.1)$$

სიჩქარისა და აჩქარების გასაგებად არ გამოგვადგება (8.2.3), (8.2.4), (8.3.4) და (8.3.5) ფორმულები, ვინაიდან არ ვიცით წერტილის დეკარტის კოორდინატები, როგორც დროის ფუნქციები.

ამ შემთხვევაში განვიხილავთ $M\tau nb$ კოორდინატთა სისტემას, რომლის ღერძები შემდეგნაირადაა მიმართული (ნახ. 8.5): წერტილთან ერთად მოძრავი M სათავიდან მხების გასწვრივ ვატარებთ $M\tau$ მხებს s კოორდინატის ათვლის დადებითი მიმართულების თანხვედრილად, Mn ღერძს – ტრაექტორიის ჩაზნექილობის მხარეს იმ

ნორმალის გასწვრივ, რომელიც მიმხებ სიბრტყეში მდებარეობს, ხოლო Mb ღერძს - ამ ღერძების მართობულად და ისეა მიმართული, რომ მათთან ერთად ადგენს მარ-ჯვენა კოორდინატთა სისტემას. მიმხებ სიბრტყეში მდებარე Mn ნორმალს **მთავარი ნორმალი**, Mb ნორმალს – **ბინორმალი,** ხოლო სამივე ღერძს ერთად – **ბუნებრივი ღერძები** ეწოდება.

სიჩქარის განსაზღვრის თანახმად, მისი $\vec{v}$ ვექტორი მდებარეობს ტრაექტორიის მხებზე, ამიტომ $M\tau nb$ კოორდინატთა სისტემაში სიჩქარეს აქვს მხოლოდ ერთი v_τ შემდგენი (ნახ. 8.5). იმ შემთხვევაში, როცა მოძრაობა s-ის დადებითი მიმართულების (ე.ი. $M\tau$ ღერძის) თანმხვდენია, მაშინ $v_\tau = |\vec{v}|$, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში, $v_\tau = -|\vec{v}|$. შევთანხმდეთ და შედგომში v_τ და v აღვნიშნოთ ერთი v სიმბოლოთი. როცა აუცილებელია ხაზგასმა იმისა, რომ საქმე გვაქვს სიჩქარის მოდულთან, ამ უკანასკ-ნელის აღსანიშნავად გამოვიყენოთ $|\vec{v}|$ სიმბოლო.

განსაზღვრა. წერტილის ვექტორული სიჩქარის გეგმილს მხებზე ვუწოდოთ წერტილის **სკალარული სიჩქარე.**

წერტილის ვექტორული და სკალარული სიჩქარეების განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}\ , \qquad (8.4.2)$$

სადაც $\vec{\tau}$ მხების ორტია.

დავუშვათ, რომ Δt დროის შუალედში M წერტილი ტრაექტორიის გასწვრივ Δs-ით (რომელიც MM_1 რკალის სიგრძის ტოლია) გადაადგილდა (ნახ. 8.2). Δs-ის ფარდობას Δt -სთან, ვუწოდოთ საშუალო სკალარული სიჩქარე და თუ მას აღვნიშ-ნავთ $v_{\text{საშ}}$-თი, მივიღებთ:

$$v_{\text{საშ}} = \Delta s / \Delta t\,. \qquad (8.4.3)$$

განსაზღვრა. საშუალო სკალარული სიჩქარის ზღვარს, რომლისკენაც ის მი-ისწრაფვის, როცა $\Delta t \to 0$, **წერტილის სკალარული სიჩქარე** ეწოდება. აღვნიშნოთ სკალარული სიჩქარე v ასოთი და გვექნება:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \qquad (8.4.4)$$

მივიღეთ: დროის მოცემულ მომენტში წერტილის სკალარული სიჩქარე ტოლია s მრუდწირული კოორდინატის წარმოებულისა დროით.

(8.4.4) ტოლობაში სიჩქარის ნიშანს განსაზღვრავს ds. ვინაიდან ყოველთვის $dt > 0$, თუ v-ს აქვს დადებითი ნიშანი, ეს ნიშნავს, რომ წერტილი მოძრაობს s-ის დადებითი ათვლის მიმართულებით, ხოლო როცა v უარყოფითია, მაშინ – საწინა-აღმდეგო მიმართულებით.

გადავიდეთ სკალარული აჩქარების სიდიდის განსაზღვრაზე. ვთქვათ, Δt დროის შუალედში წერტილის სკალარულმა სიჩქარემ მიიღო Δv ნაზრდი. Δv-ს ფარდობას Δt-სთან, ვუწოდოთ საშუალო სკალარული აჩქარება და თუ მას აღვიშ-ნავთ w_s-თი, მაშინ

$$w_{\text{საშ}} = \Delta v / \Delta t \,. \qquad (8.4.5)$$

განსაზღვრა. საშუალო სკალარული აჩქარების ზღვარს, რომლისკენაც ის მიისწრაფვის, როცა $\Delta t \to 0$, **წერტილის სკალარული აჩქარება** ეწოდება. აღვნიშნოთ სკალარული აჩქარება w-თი და გვექნება:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \,. \qquad (8.4.6)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $v = ds/dt$, მაშინ

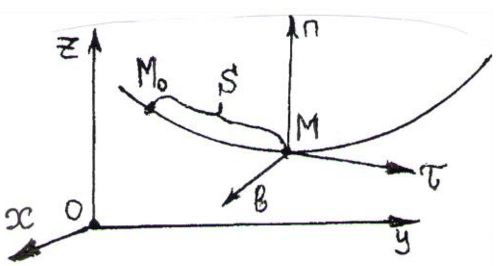
$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \,. \qquad (8.4.7)$$

მივიღეთ: დროის მოცემულ მომენტში წერტილის სკალარული აჩქარება ტოლია სკალარული სიჩქარის პირველი რიგის ან s მრუდწირული კოორდინატის მეორე რიგის წარმოებულისა დროით.

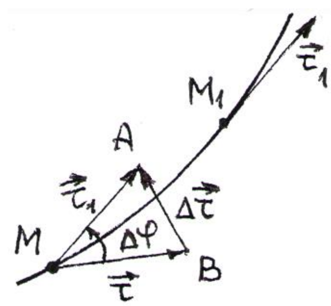
8.5. მუდმივსიგრძიანი ვექტორის წარმოებული. წირის სიმრუდის რადიუსი. მხების ორტის წარმოებული

ლემა. მუდმივსიგრძიანი ვექტორის წარმოებული არის ამ ვექტორის მართობი.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ რაიმე $\vec{P}$ ვექტორის მოდული მუდმივია. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად, $\vec{P} \cdot \vec{P} = \left|\vec{P}\right| \cdot \left|\vec{P}\right| \cdot \cos 0^\circ = \left|\vec{P}\right|^2 =$ $= const$ => $\frac{d}{dt}\left(\vec{P} \cdot \vec{P}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left|P\right|^2\right) = 0$ => $2 \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{P} = 0$ => $\frac{d\vec{P}}{dt} \perp \vec{P}$. ლემა დამტკიცებულია.



ნახ. 8.5



ნახ. 8.6

განვიხილოთ რაიმე წირი და მის ორ M და M_1 წერტილში მხების ორტები შესაბამისად აღვნიშნოთ $\bar{\tau}$ და $\vec{\tau}_1$-ით (ნახ. 8.6). გადავიტანოთ $\vec{\tau}_1$ ვექტორი M წერტილში და კუთხე $\bar{\tau}$ და $\vec{\tau}_1$ ვექტორებს შორის აღვნიშნოთ $\Delta\varphi$-ით, ხოლო MM_1 რკალის სიგრძე კი - Δs-ით. $\Delta\varphi/\Delta s$ ფარდობა ახასიათებს წირის ფორმას. მას წირის **საშუალო სიმრუდე** ეწოდება, ხოლო მის ზღვარს, როცა M_1 წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ (ან რაც იგივეა: $\Delta t \to 0$), ეწოდება **წირის სიმრუდე** M **წერტილში.** თუ სიმრუდეს აღვნიშნავთ k ასოთი, მაშინ გვექნება:

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (8.5.1)$$

სიმრუდის შებრუნებულ სიდიდეს **სიმრუდის რადიუსი** ეწოდება. თუ მას აღვნიშნავთ ρ ასოთი, გვექნება:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\varphi}. \qquad (8.5.2)$$

აღსანიშნავია, რომ წრფისათვის $\rho = \infty$, ხოლო წრეწირისთვის $\rho = R$, სადაც R წრეწირის რადიუსია.

გამოვთვალოთ მხების ორტის წარმოებული დროით. წარმოვადგნოთ იგი შემდეგი სახით:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt}. \qquad (8.5.3)$$

ამ გამოსახულებაში $\frac{ds}{dt} = v$, ხოლო $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}$. დაგვრჩა $\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}$ წარმოებულის განსაზღვრა. $\vec{\tau}$ მუდმივსიგრძიანი ვექტორია, ამიტომ ლემის თანახმად $\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \perp \vec{\tau}$, ე.ი. $\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \parallel \vec{n}$. განსაზღვრის თანახმად, $\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}\right| = \left|\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\Delta\varphi|}$. MAB სამკუთხედი ტოლფერდაა, ამიტომ $|\Delta\vec{\tau}| = 2|\vec{\tau}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა წინა ტოლობაში და მივიღებთ:

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$$

(ვინაიდან $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$).

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \parallel \vec{n}$, სადაც $\vec{n}$ მთავარი ნორმალის ორტია, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{n}. \qquad (8.5.4)$$

8.6. ვექტორული აჩქარების მხები და ნორმალური შემდგენები

ცნობილია, რომ (იხ. §8.3) ვექტორული აჩქარების ვექტორი წერტილის ტრაექტორიის $M\tau n$ მიმხებ სიბრტყეში მდებარეობს. ცხადია, აჩქარების გეგმილი ბინორმალზე ნულის ტოლია. ე.ი. $w_b = 0$. გავიგოთ აჩქარების გეგმილები დანარჩენ ორ ღერძზე. ამისათვის $\vec{v} = v\vec{\tau}$ ტოლობა (იხ. (8.4.2) ფორმულა) გავაწარმოოთ დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (8.6.1)$$

განსაზღვრის თანახმად, $\frac{d\vec{v}}{dt}$ არის M წერტილის $\vec{w}$ სრული აჩქარება. მარჯვენა მხარის პირველ შესაკრებს აქვს მხების მიმართულება და თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{w}_\tau$-თი, მივიღებთ:

$$\vec{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \qquad (8.6.2)$$

(8.6.1) ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრებში შევიტანოთ წინა პარაგრაფში მიღებული $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{n}$ გამოსახულება და თუ მიღებულ შედეგს აღვნიშნავთ $\vec{w}_n$-ით, გვექნება:

$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \qquad (8.6.3)$$

(8.6.1) ტოლობა მიღებულ აღნიშვნებში ასე ჩაიწერება:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n. \qquad (8.6.4)$$

$\vec{w}_\tau$ ვექტორს **აჩქარების მხები შემდგენი** ან **მხები აჩქარება** ეწოდება, ხოლო $\vec{w}_n$ ვექტორს – **ნორმალური შემდგენი** ან **ნორმალური აჩქარება**. საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0. \qquad (8.6.5)$$

დავამტკიცეთ შემდეგი **თეორემა:** წერტილის ვექტორული აჩქარების გეგმილი მხებზე ტოლია სკალარული სიჩქარის პირველი რიგის ან მრუდწირული კოორდინატის მეორე რიგის წარმოებულისა დროით, ხოლო გეგმილი მთავარ ნორმალზე უდრის სიჩქარის კვადრატის ფარდობას ტრაექტორიის მოცემულ წერტილში მისი სიმრუდის რადიუსთან; აჩქარების გეგმილი ბინორმალზე ნულის ტოლია.

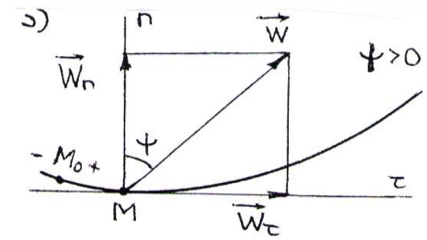
დამტკიცებული თეორემა არის კინემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი თეორემა. მას **ჰიუგენსის თეორემა** ეწოდება.

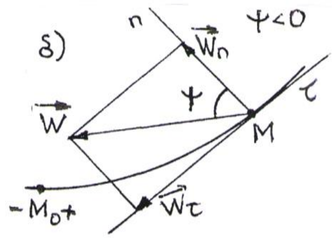
M წერტილიდან $M\tau$ მხებისა და Mn მთავარი ნორმალის გასწვრივ გადავდოთ შესაბამისად $\vec{w}_\tau$ და $\vec{w}_n$ ვექტორები (ნახ. 8.7). $\vec{w}_n$ ვექტორი ყოველთვის მიმართულია ტრაექტორიის ჩაზნექილობისაკენ, ხოლო $\vec{w}_\tau$-ს მიმართულება ან დაემთხვევა $M\tau$-ს დადებით მიმართულებას ან მისი საწინააღმდეგო იქნება იმის მიხედვით, თუ რა ნიშანი აქვს $\vec{w}_\tau$ გეგმილს.

აჩქარების $\vec{w}$ ვექტორი გამოისახება $\vec{w}_\tau$ და $\vec{w}_n$ ვექტორებზე, როგორც პარალელოგრამის გვერდებზე აგებული დიაგონალით. აღვნიშნოთ $\vec{w}$ ვექტორის მიერ მთავარ ნორმალთან შედგენილი კუთხე ψ ასოთი და გვექნება:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}, \quad tg\psi = \frac{w_\tau}{w_n}, \qquad (8.6.6)$$

სადაც $\quad \frac{\tau}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$.

ა) 

ბ) 

ნახ. 8.7

მივიღეთ: თუ წერტილის მოძრაობა მოცემულია ბუნებრივი ხერხით, მაშინ (8.4.4), (8.6.5) და (8.6.6) ფორმულებით გავიგებთ წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების მოდულსა და მიმართულებას დროის ნებისმიერ მომენტში.

დავუბრუნდეთ მოძრაობის მოცემის კოორდინატულ ხერხს. როცა მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები, მაშინ (8.2.3), (8.2.4), (8.3.4) და (8.3.5) ფორმულე-ბით გავიგებთ წერტილის სიჩქარესა და აჩქარებას. გამოვიყვანოთ ამ შემთხვევაში მხები აჩქარების გამოსათვლელი ფორმულა. ამ მიზნით $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ გამოსახუ-ლება გავაწარმოოთ დროით. მივიღებთ:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right) = \frac{2v_x \dfrac{dx}{dt} + 2v_y \dfrac{dy}{dt} + 2v_z \dfrac{dz}{dt}}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_x w_x}{v} .$$

ამგვარად,

$$w_\tau = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_x w_x}{v} . \qquad (8.6.7)$$

როცა ტრაექტორია მოთავსებულია Oxy სიბრტყეში, მაშინ (8.7.7) ასეთ სახეს ღებულობს:

$$w_\tau = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v} . \qquad (8.6.8)$$

ნორმალურ აჩქარებას გავიგებთ შემდეგი ფორმულით:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} . \qquad (8.6.9)$$

ბრტყელი ტრაექტორიის შემთხვევაში (8.6.9) ასეთ სახეს ღებულობს:

$$w_n = \frac{\left| v_x w_y - v_y w_x \right|}{v} . \qquad (8.6.10)$$

8.7. წერტილის მოძრაობის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა

განვიხილოთ წერტილის მოძრაობის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა.

1. წრფივი მოძრაობა. ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ (იხ. §8.5) წრფისათვის $\rho = \infty$, ამიტომ ამ შემთხვევაში $w_n = v^2/\rho = v^2/\infty = 0$ და წერტილის აჩქარება უდრის მხოლოდ

მხებ აჩქარებას, ე.ი.

$$w = w_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (8.7.1)$$

რადგანაც წრფივი მოძრაობის შემთხვევაში სიჩქარე იცვლება მხოლოდ რიცხობრივად, ამიტომ აქედან დავასკვნით: მხები აჩქარება ახასიათებს სიჩქარის რიცხობრივ ცვლილებას.

2. თანაბარი წრფივი მოძრაობა. ამ შემთხვევაში $w_\tau = 0$ (ვინაიდან $v = const$) და w_n=0 (ვინაიდან $\rho = \infty$), ამიტომ $w = 0$. აღსანიშნავია, რომ **წრფივი თანაბარი მოძრაობა ერთადერთი მოძრაობაა, რომლის დროსაც აჩქარება ნულის ტოლია.**

3. თანაბარი მრუდწირული მოძრაობა. მრუდწირულ მოძრაობას ეწოდება თანაბარი, თუ მთელი მოძრაობის განმავლობაში სკალარული სიჩქარე არ იცვლება, ე.ი. $v = const$, მაშინ $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ და წერტილის აჩქარება ტოლია მხოლოდ ნორმალური აჩქარების, ე.ი.

$$w = w_n = v^2/\rho. \qquad (8.7.2)$$

ამ შემთხვევაში აჩქარება მიმართულია ტრაექტორიის მთავარი ნორმალის გასწვრივ და მისი გაჩენა განპირობებულია მხოლოდ სიჩქარის მიმართულების შეცვლით, ამიტომ ვასკვნით: ნორმალური აჩქარება ახასიათებს სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას.

დავადგინოთ თანაბარი მრუდწირული მოძრაობის კანონი. როგორც ვიცით $v = \frac{ds}{dt}$ => $ds = vdt$. დავუშვათ, რომ როცა $t = t_o$, მაშინ $s = s_o$. გვაქვს: $\int_{s_o}^{s} ds = \int_{t_o}^{t} vdt$ => $s - s_o = v(t - t_o)$ =>

$$s = s_o + v(t - t_o). \qquad (8.7.3)$$

ეს არის წერტილის თანაბარი მრუდწირული მოძრაობის ზოგადი განტოლება.

როცა $t_o = 0$, მაშინ

$$s = s_o + vt. \qquad (8.7.4)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $s_o = 0$ და $t_0 = 0$, მაშინ

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}. \qquad (8.7.5)$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში s არის t დროში გავლილი მანძილი და ის დროის პროპორციულია.

4. თანაბარცვლადი მრუდწირული მოძრაობა. წერტილის მოძრაობას ეწოდება თანაბარცვლადი, თუ მხები აჩქარება მთელი მოძრაობის განმავლობაში არ იცვლება, ე.ი. $w_\tau = const$. დავადგინოთ ამ მოძრაობის კანონი. დავუშვათ, რომ როცა $t = t_o$, მაშინ

$s = s_o,\ v = v_o$. როგორც ვიცით, $w_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ => $dv = w_\tau dt$ => $\int\limits_{v_o}^{v} dv = \int\limits_{t_o}^{t} w_\tau dt$ => $v - v_o = w_\tau\left(t - t_o\right)$

=>
$$v = v_o + w_\tau\left(t - t_o\right). \tag{8.7.6}$$

მაგრამ $v = \dfrac{ds}{dt}$ და (8.7.6) ასე გადაიწერება: $\dfrac{ds}{dt} = v_o + w_\tau\left(t - t_o\right)$ =>

$ds = v_o dt + w_\tau\left(t - t_o\right)dt$ => $\int\limits_{s_o}^{s} ds = \int\limits_{t_o}^{t} v_o dt + \int\limits_{t_o}^{t} w_\tau\left(t - t_o\right)dt$ =>

$$s = s_o + v_o\left(t - t_o\right) + \frac{1}{2}w_\tau\left(t - t_o\right)^2. \tag{8.7.7}$$

ეს არის წერტილის თანაბარცვლადი მრუდწირული მოძრაობის ზოგადი განტოლება.

როცა $t_o = 0$, მაშინ

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}w_\tau t^2. \tag{8.7.8}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $t_o = 0,\ s_o = 0$, მაშინ

$$s = v_o t + \frac{1}{2}w_\tau t^2 \ . \tag{8.7.9}$$

როცა $t_o = 0,\ s_o = 0,\ v_o = 0$, მაშინ

$$s = \frac{1}{2}w_\tau t^2,\quad v = w_\tau t. \tag{8.7.10}$$

თუ მრუდწირული მოძრაობისას სიჩქარის მიმართულება იზრდება, მაშინ მოძრაობას ჰქვია **აჩქარებული,** თუ მცირდება – **შენელებული.** თუ ამავე დროს მოძრაობა თანაბარცვლადიცაა, მაშინ მოძრაობებს ჰქვია შესაბამისად **თანაბარაჩქარებული ან თანაბარშენელებული.**

ვინაიდან სიჩქარის მოდულის ცვლილება ხასიათდება მხები აჩქარებით, ამიტომ თუ სიჩქარესა და აჩქარებას ერთნაირი ნიშნები აქვთ, მაშინ მოძრაობა აჩქარებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში – შენელებული. აჩქარებული მოძრაობის დროს კუთხე სიჩქარესა და აჩქარებას შორის მახვილია, ხოლო შენელებული მოძრაობისას – ბლაგვი.

5. თანაბარცვლადი წრფივი მოძრაობა. ამ შემთხვევაში $w_n = 0$, ამიტომ $w_\tau = w = const$ და (8.8.6)-(8.8.10) ფორმულები ასეთი სახით ჩაწერებიან:

$$v = v_0 + w\left(t - t_0\right),\quad s = s_o + v_o\left(t - t_o\right) + \frac{1}{2}w\left(t - t_o\right)^2, \tag{8.7.11}$$

$$v = v_0 + wt,\qquad s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}wt^2 \qquad \left(t_o = 0\right), \tag{8.7.12}$$

$$v = v_0 + wt,\qquad s = v_o t + \frac{1}{2}wt^2 \qquad \left(t_o = s_o = 0\right), \tag{8.7.13}$$

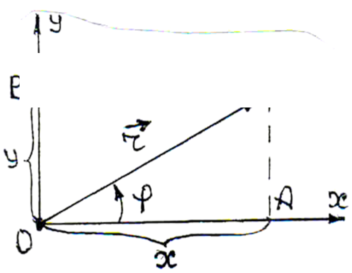
$$v = wt,\qquad s = \frac{1}{2}wt^2 \qquad \left(t_o = s_o = v_o = 0\right). \tag{8.7.14}$$

8.8. წერტილის სიჩქარე და აჩქარება პოლარულ კოორდინატებში

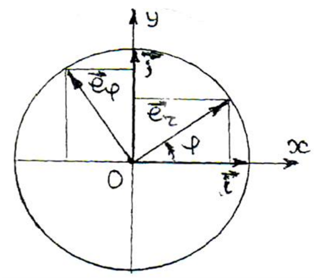
Oxy სიბრტყეში M წერტილის მდებარეობა ცალსახად განისაზღვერება x და y დეკარტის კოორდინატებით (ნახ. 8.8). ასევე ცალსახად იქნება განსაზღვრული წერტილის მდებარეობა, თუ გვეცოდინება მისი $r=|\vec{r}|=|\overrightarrow{OM}|$ დაშორება კოორდინატთა სათავიდან და φ კუთხე, რომელსაც $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი ადგენს Ox ღერძთან. φ კუთხე აითვლება Ox ღერძიდან საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმარ-თულებით. (r,φ) კოორდინატებს **პოლარული კოორდინატები** ეწოდება. ნახ. 8.8-დან ადვილად მიიღება დეკარტის კოორდინატებთან მათი დამაკავშირებელი ფორმულები:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi\quad \left(r\ge 0,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right). \qquad (8..1)$$

იმ შემთხვევაში, როცა φ კუთხე იზრდება უსასრულოდ, მაშინ მოვხსნით მასზე დადებულ შეზღუდვას. ადვილი მისახვედრია, რომ $r=const$ საკოორდინატო წირები წარმოადგენს კონცენტრულ წრეწირებს ცენტრით O წერტილში, ხოლო $\varphi=const$ საკოორდინატო წირები - O ცენტრიდან გამოსულ სხივებს.



ნახ. 8.8



ნახ. 8.9

მიმართულებას $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვეწტორის გასწვრივ, **რადიალური** ანუ **სიგრძივი** ეწოდება, ხოლო მის მართობულ ($r=const$ საკოორდინატო წრეწირების მხების თან-ხვედრილ) მიმართულებას – **ტრანსვერსალური** ანუ **განივი.** რადიალური მიმარ-თულების ერთეულოვანი ვექტორი აღვნიშნოთ $\vec{e}_r$-ით, ხოლო ტრანსვერსალურისა - $\vec{e}_\varphi$-ით. ადვილად მივიღებთ, რომ (ნახ. 8.9)

$$\vec{e}_r=\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi,$$

$$\vec{e}_\varphi=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi,$$

სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ შესაბამისად Ox და Oy ღერძების ორტებია.

გამოვთვალოთ $\dfrac{d\vec{e}_r}{d\varphi}$ და $\dfrac{d^2\vec{e}_r}{d\varphi^2}$, გვექნება:

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi=\vec{e}_\varphi, \qquad \frac{d^2\vec{e}_r}{d\varphi^2}=\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}=-\vec{i}\cos\varphi-\vec{j}\sin\varphi=-\vec{e}_r.$$

გამოვიყვანოთ რადიალურ და ტრანსვერსალურ მიმართულებებზე სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილების გამოსათვლელი ფორმულები. დავუშვათ, რომ $\vec{r}=\vec{e}_r\cdot r$.

აქედან, $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{e}_r\cdot r\right)=\frac{d\vec{e}_r}{dt}\cdot r+\vec{e}_r\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\cdot r+\vec{e}_r\cdot\frac{dr}{dt}=\vec{e}_r\cdot\frac{dr}{dt}+\vec{e}_\varphi\cdot r\cdot\frac{d\varphi}{dt}$.

ამგვარად,

$$\vec{v}=\vec{e}_r\cdot\frac{dr}{dt}+\vec{e}_\varphi\cdot r\cdot\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (8.8.2)$$

დავაგეგმილოთ (8.9.2) ტოლობა რადიალურ და ტრანსვერსალურ მიმართულებებზე. მივიღებთ:

$$v_r=\frac{dr}{dt},\quad v_\varphi=r\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (8.8.3)$$

ახლა გამოვთვალოთ აჩქარება, გვექნება:

$$\vec{w}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{e}_r\frac{dr}{dt}+\vec{e}_\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{d\vec{e}_r}{dt}\frac{dr}{dt}+\vec{e}_r\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}r\frac{d\varphi}{dt}+\vec{e}_\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\vec{e}_\varphi r\frac{d^2\varphi}{dt^2}=$$

$$=\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt}+\vec{e}_r\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}r\frac{d\varphi}{dt}+\vec{e}_\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\vec{e}_\varphi r\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\vec{e}_\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\vec{e}_\varphi\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+$$

$$+\vec{e}_\varphi r\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\vec{e}_r r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\vec{e}_r\frac{d^2r}{dt^2}=\vec{e}_r\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)+\vec{e}_\varphi\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $\frac{dr}{dt}=\dot{r},\ \frac{d^2r}{dt^2}=\ddot{r},\ \frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi},\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}=\ddot{\varphi}$, მაშინ

$$\vec{w}=\vec{e}_r\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)+\vec{e}_\varphi\left(2\dot{r}\dot{\varphi}-r\ddot{\varphi}\right). \qquad (8.8.4)$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა რადიალურ და ტრანსვერსალურ მიმართულებებზე. მივიღებთ:

$$w_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2,\quad w_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}. \qquad (8.8.5)$$

ტრანსვერსალური აჩქარება შეიძლება ასეთი სახითაც ჩავწეროთ:

$$w_r=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right). \qquad (8.8.6)$$

მხები აჩქარება გამოითვლება

$$w_\tau=\frac{v_r w_r+v_\varphi w_\varphi}{v}, \qquad (8.8.7)$$

ხოლო ნორმალური - $$w_n=\frac{\left|v_r w_\varphi-v_\varphi w_r\right|}{v} \qquad (8.8.8)$$

მტკიცდება, რომ თუ r და φ კოორდინატებს შორის არსებობს $r=f(\varphi)$ ფუნქციური დამოკიდებულება, მაშინ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\rho=\frac{\left(r^2+\dot{r}^2\right)^{3/2}}{r^2+2\dot{r}^2-r\ddot{r}}, \qquad (8.8.9)$$

სადაც $\dot{r}=dr/d\varphi,\ \ddot{r}=d^2r/d\varphi^2$.

თუ r და φ კოორდინატები მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ ტრაექ-ტორიის სიმრუდის რადიუსი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\rho = \frac{\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)^{3/2}}{r\dot{r}\ddot{\varphi} + 2\dot{r}^2\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^3 - r\ddot{r}\dot{\varphi}}. \quad (8.8.10)$$

ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი შეგვიძლია ასეც განვსაზღვროთ: გვეცოდი-ნება რა სიჩქარე და აჩქარება (თავისი გეგმილებით), გავიგებთ ნორმალურ აჩქარე-ბას (8.8.8) ფორმულით და შემდეგ –

$$\rho = v^2/w_n \text{ -ს.} \quad (8.8.11)$$

8.9. მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

წერტილის კინემატიკის ამოცანები შეგვიძლია დავყოთ შემდეგ ორ ძირითად ტიპად:

I. წერტილის წრფივ მოძრაობასთან დაკავშირებული ამოცანები. ამ ტიპის ამ-ოცანებში წერტილის წრფივი მოძრაობის განტოლებიდან ვსაზღვრავთ წერტილის ტრაექტორიას, $\vec{v}$ სიჩქარეს და $\vec{w}$ აჩქარებას, ამასთან ეს განტოლება ან მოცემულია ან ამოცანაში მოცემული პირობებით უნდა განვსაზღვროთ.

II. წერტილის მრუდწირულ მოძრაობასთან დაკავშირებული ამოცანები. ამ ტიპის ამოცანები თავის მხრივ იყოფა რამდენიმე ჯგუფად.

1. ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება წერტილის ტრაექტორიის, $\vec{v}$ სიჩქარის და $\vec{w}$ აჩქარების განსაზღვრა დეკარტის კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის გან-ტოლებების გამოყენებით.

2. ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება დეკარტის კოორდინატებში წერტილის მოძრაობის განტოლებების შედგენა და წერტლის ტრაექტორიის, აგრეთვე $\vec{v}$ სიჩქა-რისა და $\vec{w}$ აჩქარების განსაზღვრა.

3. ამოცანები, რომლებშიც გამოიყენება წერტილის მდებარეობის მოცემის ბუ-ნებრივი ხერხი, ე.ი. მოცემულია მოძრაობის ტრაექტორია, ხოლო მის გასწვრივ მოძ-რაობის განტოლება ან მოცემულია ან უნდა დავადგინოთ ამოცანაში მოცემული პი-რობებით.

4. კომბინირებული ამოცანები.

კინემატიკის ამოცანები წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების გამოთვლაზე სა-სურველია ჩატარდეს შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. ვირჩევთ კოორდინატთა სისტემას;

2. არჩეულ კოორდინატთა სისტემაში ვადგენთ წერტილის მოძრაობის განტო-ლებებს;

3. მოძრაობის განტოლებების საშუალებით გავიგებთ სიჩქარის გეგმილებს კო-ორდინატთა ღერძებზე და სიჩქარის სიდიდესა და მიმართულებას;

4. სიჩქარის გეგმილებების საშუალებით გავიგებთ აჩქარების გეგმილებს კო-ორდინატთა ღერძებზე და აჩქარების სიდიდესა და მიმართულებას;

ამოცანა 8.1. წერტილის მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით ნე-ბისმიერად შერჩეულ ტრაექტორიაზე გაიგეთ s დაშორება ათვლის სათავიდან წერ-

ტილის ბოლო მდებარეობამდე და წერტილის მიერ გავლილი σ მანძილი მითით-ბულ დროის შუალედში (s და σ იზომება სმ-ში, დრო წმ-ში): [64]

1. $s=5-4t+t^2, \quad 0\le t\le 5;$ 2. $s=1+2t-t^2, \quad 0\le t\le 2,5;$

3. $s=4\sin 10t, \quad \pi/20\le t\le 3\pi/10;$ 4. $s=t^3/3-2,5\,t^2+6\,t-3, \quad 0\le t\le 4.$

ამოხსნა. ავიღოთ წრფივი ტრაექტორია. ძალიან ადვილად გამოვთვლით s-ს. ამოცანის პირობის თანახმად, 1. $s(5)=5-4\cdot 5+5^2=10$ სმ; 2. $s(2,5)=1+5-6,25=-0,25$ სმ; 3. $s(\pi/20)=4\sin 10(3\pi/10)=0$; 4. $s(4)=\frac{1}{3}\cdot 64-2,5\cdot 16+6\cdot 4-3=2\frac{1}{3}$ სმ.

ნახ. 8.10

განვსაზღვროთ წერტილის მიერ გავლილი σ მანძილი.

1. გავიგოთ საწყის მომენტში სად იმყოფება წერტილი s ღერძზე: $s(0)$=5 სმ. (ნახ. 8.10). საინტერესოა, 5 წმ-ის განმავლობაში წერტილი ხომ არ ჩერდება სადმე და შემდეგ აგრძელებს მოძრაობას? ამის გასაგებად განვსაზღვროთ წერტილის სიჩქარე და გავუტოლოთ ნულს: $v=ds/dt=-4+2t$ =0 => t_1=2 წმ. მივიღეთ, რომ მოძრაობის დაწყებიდან 2 წმ-ის შემდეგ წერტილი ჩერდება. ვნახოთ, სად იმყოფება ის ამ მო-მენტში: $s(2)=5-4\cdot 2+4$=1 სმ. ადვილი გამოსათვლელია, რომ საწყის მომენტიდან გა-ჩერებამდე წერტილმა გაიარა $\sigma_1=s(0)$-$s(2)$=5-1=4 სმ-ის ტოლი მანძილი. შემდეგ წერტილი ამოძრავდა. გავიგოთ ღერძის რომელ წერტილში მივიდა ჩვენი წერტილი 5 წმ-ის გასვლის შემდეგ: $s(5)=10$ სმ. 3 წმ-ის განმავლობაში წერტილმა კიდევ გაიარა $\sigma_2=s(5)-s(2)$=10-1=9 სმ. 5 წმ-ის განმავლობაში წერტილმა სულ გაიარა $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ =4+9=13 სმ.

ანალოგიურად გავიგებთ გავლილ მანძილებს დანარჩენ მაგალითებშიც.

2. $s(0)=1$ სმ; $v=2-2t$ =0 => $t_1=1$ წმ; $s(1)=2$ სმ => $\sigma_1=s(1)$-$s(0)$=2-1=1 სმ; $s(2,5)=-0,25$ სმ; $\sigma_2=1-(-0,25)$=1,25 => $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$=2+1,25=3,25 სმ.

3. $s(\pi/20)=4\sin 10(\pi/20)=4\sin(\pi/2)=4$ სმ; $v=4\cdot 10\cos 10t$ =0 <=> $\cos 10t=0$ => $10t=\pi/2+\pi k,\ k\in Z$ => $t=\pi/20+\pi k/10$ => $t_0=\pi/20$, $t_1=\pi/20+\pi/10=3\pi/20$, $t_2=\pi/20+$ $+2\pi/10=5\pi/20$; ბოლო მომენტია $t_3=3\pi/10$ წმ. $s(3\pi/20)=-4$ სმ => $\sigma_1=s(\pi/20)-$ - $s(3\pi/20)=4-(-4)=8$ სმ; $s(5\pi/20)$=4 სმ => $\sigma_2=s(5\pi/20)-s(3\pi/20)$=$8-(-8)$=16 სმ; $\sigma_3=s(5\pi/10)-s(3\pi/20)$=$4-0$=4 => $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$=8+8+4=20 სმ.

4. $s(0)=-3$ სმ; $v=t^2-5t+6=0$ => $t_1=2$ წმ, $t_2=3$ წმ, ბოლო მომენტია $t=4$ წმ;

$s(2)=1\frac{2}{3}$ სმ => $\sigma_1=s(2)-s(0)=1\frac{2}{3}-(-3)=4\frac{1}{3}$; $s(3)=1{,}5$ => $\sigma_2=s(2)-s(3)=1\frac{2}{3}-1{,}5=\frac{1}{6}$; $s(4)=2\frac{1}{3}$ => $\sigma_3=s(4)-s(3)=2\frac{1}{3}-1{,}5=\frac{5}{6}$ => $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=4\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=5\frac{1}{3}$.

პასუხი. 1. $s(5)=10$ სმ, $\sigma=13$ სმ; 2. $s(2{,}5)=-0{,}25$ სმ, $\sigma=3{,}25$ სმ;

3. $s(\pi/20)=0$, $\sigma=20$ სმ. 4. $s(4)=2\frac{1}{3}$ სმ, $\sigma=5\frac{1}{3}$ სმ.

ამოცანა 8.2. მოცემული წერტილის მოძრაობის განტოლებებით იპოვეთ მისი ტრაექტორია და ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი, ათვლილი წერტილის საწყისი მდებარეობიდან:

1. $x=3t^2,\ \ y=4t^2;$ 2. $x=3\sin t,\ \ y=3\cos t;$ 3. $x=a\cos^2 t,\ \ y=a\sin^2 t;$

4. $x=5\cos 5t^2,\ \ y=5\sin 5t^2.$

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლების გასაგებად მოძრაობის განტოლებებიდან უნდა გამოვრიცხოთ t პარამეტრი. მივიღებთ მრუდს, რომელიც მთლიანად ან ნაწილობრივ არის წერტილის ტრაექტორია. წერტილის ტრაექტორიაზე მოძრაობის $s=f(t)$ სახის კანონის დასადგენად უნდა გამოვიყენოთ (8.1.8) ფორმულა.

განვიხილოთ თითოეული მაგალითი ცალ-ცალკე.

1. $x=3t^2,\ y=4t^2$ => $4x-3y=0$, $x>0,\ y>0$ => წერტილის ტრაექტორია არის ნახევარწრფე.

$$dx=6t\,dt,\ dy=8t\,dt \ \Rightarrow\ ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=10t\,dt \ \Rightarrow\ s=\int_0^t 10t\,dt=5t^2.$$

2. $x=3\sin t,\ y=3\cos t$ => $x^2+y^2=9$.

$$dx=3\cos t\,dt,\ dy=-3\sin t\,dt \ \Rightarrow\ ds=3dt \quad s=\int_0^t 3dt=3t.$$

3. $x=a\cos^2 t,\ y=a\sin^2 t,\ a>0$ => ტრაექტორია არის $x+y=a$ წრფის მონაკვეთი, ამასთან $0\le x;\ y\le a$; $dx=-a\sin 2t\,dt,\ dy=a\sin 2t\,dt$ => $ds=a\sqrt{2}\sin 2t\,dt$ =>

$$s=\int_0^t a\sqrt{2}\sin 2t\,dt=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\left(-\cos 2t\right)_0^t=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\left(-\cos 2t+1\right)=a\sqrt{2}\sin^2 t.$$

4. $x=5\cos 5t^2,\ y=5\sin 5t^2$ => $x^2+y^2=25$.

$$dx=-50t\sin 5t^2dt,\ dy=50t\cos 5t^2 \ \Rightarrow\ ds=50t\,dt \ \Rightarrow\ s=\int_0^t 50t\,dt=25t^2.$$

პასუხი. 1. $4x-3y=0$, $x>0,\ y>0$; $s=5t^2$;

2. $x^2+y^2=9$; $s=3t$;

3. $x+y=a$ წრფის მონაკვეთი; $s=a\sqrt{2}\sin^2 t$;

4. $x^2+y^2=25$; $s=25t^2$.

ამოცანა 8.3. მოცემულია M წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x=3t,\ y=2t^2+1 \qquad (x \text{ და } y \text{ - სმ-ში}, \quad t \text{ - წმ-ში}).$$

დაადგინეთ ტრაექტორიის განტოლება და დროის t=1 წმ მომენტისათვის განსაზღვრეთ წერტილის სიჩქარე, სრული, მხები და ნორმალური აჩქარებები, აგრეთვე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი.

ამოხსნა. x-ის გამოსახულებიდან განვსაზღვროთ $t=x/3$ და შევიტანოთ y-ის ფორმულაში, მივიღებთ:

$$y=\frac{2}{9}t^2+1. \qquad (ა)$$

ეს არის პარაბოლა, რომლის (0;1) წვეროში საწყის მომენტში იმყოფება M წეტილი. რადგანაც $x>0,\ y>0$, ამიტომ წერტილის ტრაექტორია არის (ა) პარაბოლის მარჯვენა შტო.

გამოვთვალოთ წერტილის სიჩქარე:

$$v_x=3,\ v_y=4t \quad => \quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{9+16t^2} \text{ სმ/წმ.}$$

გამოვთვალოთ წერტილის აჩქარება:

$$w_x=0,\ w_y=4 \quad => \quad w=4 \text{ სმ/წმ}^2.$$

წერტილის მხები აჩქარება განვსაზღვროთ (8.6.8) ფორმულით:

$$w_\tau=\frac{v_xw_x+v_yw_y}{v}=\frac{4t\cdot 4}{v}=\frac{16t}{\sqrt{9+16t^2}} \text{ სმ/წმ}^2.$$

გავიგოთ ნორმალური აჩქარება:

$$w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}=\sqrt{4^2-\frac{256t^2}{9+16t^2}}=\frac{12}{\sqrt{9+16t^2}} \text{ სმ/წმ}^2.$$

ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსს გავიგებთ w_n-ის გამოსათვლელი ფორმულიდან:

$$\rho=\frac{v^2}{w_n}=\left(9+16t^2\right):\frac{12}{\sqrt{9+16t^2}}=\frac{\left(9+16t^2\right)^{1,5}}{12} \text{ სმ.}$$

როცა t=1 წმ, მაშინ $v=5$ სმ/წმ, $w=4$ სმ/წმ^2, $w_\tau=3,2$ სმ/წმ^2; $w_n=2,4$ სმ/წმ^2; $\rho\approx 10,42$ სმ.

ამოცანა 8.4. დაადგინეთ ნახ. 8.11-ზე გამოსახული მექანიზმის C წერტილის ტრაექტორიის განტოლება და დროის $t=\pi/2\omega$ წმ მომენტისათვის განსაზღვრეთ წერტილის სიჩქარე, სრული, მხები და ნორმალური აჩქარებები, აგრეთვე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი, თუ OA მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით და $OA=AB=2\,AC=l$ სმ.

ამოხსნა. ეს ამოცანა იმით განსხვავდება ამოცანა 8.3-საგან, რომ წერტილის მოძრაობის განტოლებები უცნობია. ისინი ჩვენ უნდა შევადგინოთ. C წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x და y-ით. ნახ. 8.11-დან ვიგებთ: $x=1,5\,l\cos\varphi$, $y=$

$=0,5l\sin\varphi$. პირობის თანახმად, OA მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით, ამიტომ $\varphi=\omega t$ და C წერტილის მოძრაობის განტოლებებისთვის საბოლოოდ გვაქვს:

$$x=1,5l\cos\omega t\,,\quad y=0,5l\sin\omega t\,. \qquad (\text{ა})$$

ამის შემდეგ მოვიქცევით ზუსტად ისე, როგორც წინა ამოცანაში.

ტრაექტორიის განტოლებას აქვს $x^2\Big/\left(\frac{3l}{2}\right)^2+y^2\Big/\left(\frac{l}{2}\right)^2=1$ სახე, რაც არის ელიფსი $3l/2$ და $l/2$ ნახევარღერძებით.

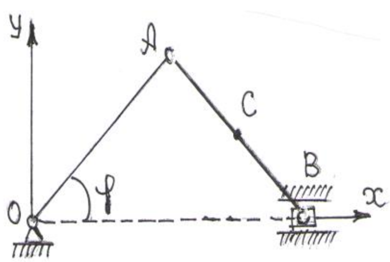
გამოთვლებით ვღებულობთ:

$$v_x=-\frac{3l\omega}{2}\sin\omega t\,,\quad v_y=\frac{l\omega}{2}\cos\omega t \quad => \quad v=\frac{l\omega}{2}\sqrt{1+8\sin^2\omega t}\,,$$

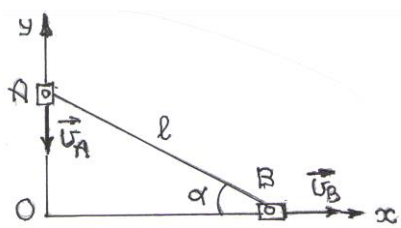
$$w_x=-\frac{3l\omega^2}{2}\cos\omega t\,,\quad w_y=-\frac{l\omega^2}{2}\sin^2\omega t \quad => \quad w=\frac{l\omega^2}{2}\sqrt{1+8\cos^2\omega t}\,,$$

$$w_\tau=\frac{2l\omega^2\sin 2t}{\sqrt{1+8\sin^2\omega t}}\,,\quad w_n=\frac{3l\omega^2}{2\sqrt{1+8\sin^2\omega t}}\,,\quad \rho=\frac{l}{6}\left(1+8\sin^2\omega t\right)^{1,5}.$$

როცა $t=\pi/2\omega$ წმ, მაშინ $v=3l\omega/2$ სმ/წმ; $w=l\omega^2/2$ სმ/წმ^2; $w_\tau=0$; $w_n=l\omega^2/2$ სმ/წმ^2; $\rho=9l/2$.



ნახ. 8.11



ნახ. 8.12

ამოცანა 8.5. კოორდინატთა ღერძების გასწვრივ სრიალებენ l სიგრძის AB ღეროთი შეერთებული A და B ქუროები (ნახ. 8.12). ქუროების როგორი განლაგებისას იქნება v_A ორჯერ მეტი v_B-ზე?

ამოხსნა. ცხადია, რომ $OB=x_B$ და $OA=y_A$. $\triangle AOB$-დან $x_B^2+y_B^2=l^2$ =>

$$\frac{d}{dt}\left(x_B^2\right)+\frac{d}{dt}\left(y_A^2\right)=\frac{d}{dt}\left(l^2\right) => 2x_B\frac{dx_B}{dt}+2y_A\frac{dy_A}{dt}=0 => x_Bv_B+y_A\left(-v_A\right)=0 => x_Bv_B=y_Av_A\,.$$

შევიტანოთ $v_A=2v_B$, მივიღებთ: $x_Bv_B=y_A2v_B$ =>

$$x_B=2y_A\,. \qquad (\text{ა})$$

გარდავქმნათ მიღებული გამოსახულება: $y_A=\sqrt{l^2-x_B^2}$ => $x_B=2\sqrt{l^2-x_B^2}$ =>

$$x_B=\frac{2\sqrt{5}}{5}\,l\,. \qquad (\text{ბ})$$

ანალოგიურად მივიღებთ: $y_A = \frac{\sqrt{5}}{5}\, l$. (გ)

შენიშვნა. §9.1-ში დავამტკიცებთ თეორემას (გრასჰოფის თეორემა), რომლის თანახმად გეგმ$_{AB}\vec{v}_B$=გეგმ$_{AB}\vec{v}_A$ <=> $v_B \cos\alpha = v_A \sin\alpha$, $v_A = 2v_B$ => $tg\alpha = 1/2$.

პასუხი. $x_B = 2y_A$ ან $x_B = \frac{2\sqrt{5}}{5}\, l$ ან $y_A = \frac{\sqrt{5}}{5}\, l$ ან $tg\alpha = 1/2$.

ამოცანა 8.6. როცა x ღერძი მიმართულია ჰორიზონტალურად, ხოლო y ღერძი ვერტიკალურად ზევით (ნახ. 8.13) და მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა სიჩქარის პროპორციულია, მაშინ წერტილის მოძრაობის განტოლებებს აქვა შემდეგი სახე:

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}\left(1 - e^{-kgt}\right), \quad y = \frac{1}{kg}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)\left(1 - e^{-kgt}\right) - \frac{t}{k}, \qquad (ა)$$

სადაც v_0, α, k, g მუდმივი სიდიდეებია. გაიგეთ:

1. სიჩქარე საწყის მომეტში,

2. საწყისი მდებარეობის დონიდან ზევით ასვლის h უდიდესი სიმაღლე,

3. ჰორიზონტის გასწვრივ L დაშორება საწყისი მდებარეობიდან უდიდესი სიმაღლის მდებარეობამდე.

ამოხსნა. განვსაზღვროთ წერტილის სიჩქარე:

$$v_x = dx/dt = v_0 \cos\alpha e^{-kgt}, \qquad (ბ) \qquad v_y = dy/dt = \left(v_0 \sin\alpha + 1\right)e^{-kgt} - \frac{1}{k}. \qquad (გ)$$

როცა $t = 0$, მაშინ $v_{0x} = v_0 cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ => $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = v_0$.

$cos\left(x\hat{}\vec{v}\right) = v_{0x}/v_0 = v_0 \cos\alpha/v_0 = \cos\alpha$, $cos\left(x\hat{}\vec{v}\right) = v_{0x}/v_0 = v_0 \cos\alpha/v_0 = \cos\alpha$.

მივიღეთ, რომ საწყის მომენტში სიჩქარის მოდული უდრის v_0-ს და ჰორზონ-ტთან ადგენს α კუთხეს.

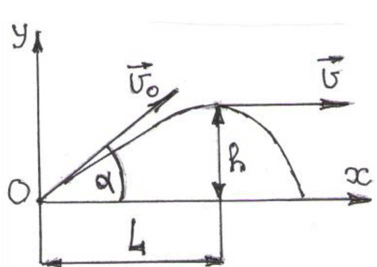
ცხადია, რომ უმაღლეს მდებარეობაში წერტილის სიჩქარის v_y შემდგენი ნუ-ლის ტოლია, ე.ი. $v_y = 0$ <=> $\left(v_0 \sin\alpha + 1\right)e^{-kgt_1} - \frac{1}{k} = 0$ => $e^{kgt_1} = 1 + kv_0 \sin\alpha$ =>

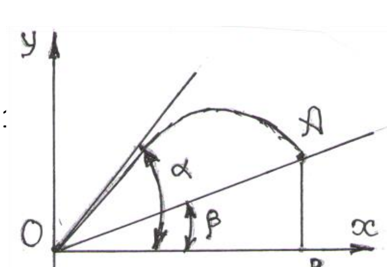
$$t_1 = \frac{1}{kg}\ln\left(1 + kv_0 \sin\alpha\right). \qquad (დ)$$

t_1 არის დროის ის მომენტი, როცა წერტილმა მიაღწია უმაღლეს მდებარეობას. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა y-ის ფორმულაში, მივიღებთ h-ს:

$$h = \frac{1}{kg}\left(v_0 siv\alpha + \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{1 + kv_0 \sin\alpha}\right) - \frac{\ln\left(1 + kv_0 \sin\alpha\right)}{k^2 g} = \frac{1 + kv_0 \sin\alpha}{k^2 g}\frac{kv_0 \sin\alpha}{1 + kv_0 \sin\alpha} -$$

$$- \frac{\ln\left(1 + kv_0 \sin\alpha\right)}{k^2 g} = \frac{v_0 \sin a}{kg} - \frac{1}{k^2 g}\ln\left(1 + kv_0 \sin\alpha\right).$$





ნახ. 8.13 ნახ. 8.14

ცხადია, რომ $L = x(t_1) = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}\left(1 - \frac{1}{1 + kv_0 \sin\alpha}\right) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kv_0 \sin\alpha)}$.

პასუხი. 1. $v(0) = v_0$, $\cos\left(x\hat{}\vec{v}\right) = \alpha$; 2. $h = \frac{v_0 \sin a}{kg} - \frac{1}{k^2 g}\ln(1 + kv_0 \sin\alpha)$;

3. $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kv_0 \sin\alpha)}$.

ამოცანა 8.7. დაჯდომისას თვითმფრინავის სიჩქარე უდრის 400 კმ/სთ. განსაზღვრეთ თვითმფრინავის შენელება, თუ სამუხრუჭო მანძილი არის 1200 მ და შენელება მუდმივია.

ამოხსნა. თვითმფრინავის მოძრაობა არის წრფივი და თანაბრადცვლადი. გამოვიყენოთ (8.7.13) ფორმულები: $v = v_0 - wt$, $s = v_o t - \frac{1}{2}wt^2$. პირობის თანახმად, v_0=54 კმ/სთ = 1000/9 მ/წმ, $v = 0$, s=1200 მ, $w_\tau = const$. სამუხრუჭო დრო აღვნიშნოთ T -თი და მოცემული მნიშვნელობების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$0 = \frac{1000}{9} - wT, \quad 1200 = \frac{1000}{9}T - \frac{wT^2}{2} \quad => \quad w \approx 5,14 \text{ მ/წმ}^2.$$

პასუხი. $\approx 5,14$ მ/წმ^2.

ამოცანა 8.8. 54 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავმა მატარებელმა პირველ 30 წმ-ში გაიარა 600 მ. მოძრაობა თანაბარცვლადია. განსაზღვრეთ მატარებლის სიჩქარე და აჩქარება 30-ე წამის ბოლოს, თუ ის მოძრაობს R=1 კმ რადიუსის მქონე მოსახვევში.

ამოხსნა. მატარებლის მოძრაობა თანაბარცვლადი და მრუდწირულია. გამოვიყენოთ (8.7.6) და (8.7.9) ფორმულები: $v = v_0 + w_\tau t$, $s = v_o t + \frac{1}{2}w_\tau t^2$. პირობის თანახმად, v_0=54 კმ/სთ=15 მ/წმ, s=600 მ, t=30 წმ, R=1 კმ =1000 მ, $w_\tau = const.$ ამ მნიშვნელობების გათვალისწინებით (8.7.6) და (8.7.9) ფორმულები ასეთ სახეს ღებულობენ:

$$v = 15 + w_\tau 30, \quad 600 = 15\cdot 30 + w_\tau \frac{900}{2} \quad => \quad v = 25 \text{ მ/წმ}, \quad w_\tau = 1/3 \text{ მ/წმ}^2.$$

ვიცით რა სიჩქარე და ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი, გავიგებთ ნორმალურ აჩქარებას შემდეგი ფორმულით: $w_n = v^2/R = 25^2/1000$=0,625. შემდგენების განსაზღვრის შემდეგ გავიგებთ სრულ აჩქარებას: $w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{(0,625)^2 + (1/3)^2} \approx \sqrt{0,3906 + 0,1111} =$ $= \sqrt{0,5017} \approx 0,708$ მ/წმ^2.

პასუხი. $v=25$ მ/წმ; w=0,708 მ/წმ^2.

ამოცანა 8.9. ვერტიკალურად ზევით ასროლილი წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $x=v_0t-gt^2/2$, სადაც v_0 და g მუდმივი სიდიდეებია. განსაზღვრეთ წერტილის სიჩქარე და აჩქარება, ასვლის მაქსიმალური სიმაღლე და ამ სიმაღლეზე ასვლისთვის დახარჯული დრო.

ამოხსნა. ადვილად გავიგებთ: $v=v_x=dx/dt=v_0-gt$, $w=-g$. როგორც ვხედავთ, აჩქარება მუდმივია. როცა $t=0$, მაშინ $v=v_0$. მივიღეთ, რომ მოძრაობის განტოლებაში მოცემული v_0 კოეფიციენტი არის წერტილის საწყისი სიჩქარე. ცხადია, წერტილის სიჩქარე მისი უმაღლეს მდებარეობაში უდრის ნულს, ამიტომ $0=v_0-gT$, სადაც T არის უმაღლეს სიმაღლეზე ასვლისთვის საჭირო დროის შუალედი => $T=v_0/g$. მაშინ $h=x|_{t=T}=v_0T-gT^2/2\,v_0\cdot v_0\big/g-(g/2)\big/\left(v_0^2/g^2\right)=v_0^2/2g$.

პასუხი. $v=v_0-gt$; $w=-g$; $T=v_0/g$; $h=v_0^2/2g$.

ამოცანა 8.10. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x=\frac{1}{4}t^2+\ln(1+t),\qquad y=\frac{2}{3}t+\ln(2+t).$$

განსაზღვრეთ წერტილის მხები აჩქარება პირველი წამის ბოლოს.

ამოხსნა. მხები აჩქარება შეგვიძლია გავიგოთ როგორც წერტილის სიჩქარის დროით გაწარმოებით (იხ. (8.6.5) ფორმულა), ასევე (8.6.8) ფორმულით. გამოვიყენოთ (8.6.8) ფორმულა: $w_\tau=\dfrac{v_xw_x+v_yw_y}{v}$. როგორც ვხედავთ, უნდა გამოვთვალოთ სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები და სიჩარის მოდული.

$v_x=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{1+t}$, $v_y=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2+t}$ => $w_x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}$, $w_y=-\dfrac{2}{(2+t)^2}$. როცა t=1 წმ, მაშინ v_x=1 მ/წმ, v_y=1 მ/წმ => $v=\sqrt{2}$ მ/წმ, $w_x=\dfrac{1}{4}$ მ/წმ^2, $w_y=-\dfrac{1}{9}$ მ/წმ^2. შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები w_τ-ს ფორმულაში და მივიღებთ: $w_\tau=\dfrac{1\cdot 1/4+1\cdot(-1/9)}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}/72$ მ/წმ^2.

პასუხი. $5\sqrt{2}/72$ მ/წმ^2.

ამოცანა 8.11. ჭურვი, რომელიც გამოფრინდა მთის ფერდობის ძირში მდგომი ქვემეხიდან, მოძრაობს შემდეგი განტოლებების მიხედვით:

$$x=v_0\,t\,cos\alpha,\qquad y=v_0\,t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2},$$

სადაც α არის კუთხე ჰორიზონტსა და ჭურვის მოძრაობის მიმართულებას შორის (ნახ. 8.14). განსაზღვრეთ ჭურვის ფრენის სიშორის უდიდესი მნიშვნელობის შესაბამისი α კუთხის სიდიდე, თუ ფერდობის დახრის კუთხე უდრის β-ს.

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობის განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი: $t=x/v_0\cos\alpha$ შევიტანოთ y-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}+v_0 tg\alpha\,. \qquad (ა)$$

სადაც α არის კუთხე ჰორიზონტსა და ჭურვის მოძრაობის მიმართულებას შორის.

OA წრფის განტოლებაა: $y=x\cdot tg\beta\,.$ (ბ)

A წერტილის y ორდინატის მნიშვნელობები, განსაზღვრული (ა) და (ბ) ტოლობებიდან, ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს, ე.ი.

$$x\cdot tg\beta=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}+x\cdot tg\alpha \;\;=>\;\; x\left(tg\alpha-tg\beta\right)=\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \;\;=>$$

$$x=\frac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha\left(tg\alpha-tg\beta\right)=\frac{v_0^2}{g}\left(\sin2\alpha-2\cos^2\alpha\cdot tg\beta\right).$$

მიღებულ გამოსახულებაში v_0 და β მუდმივი სიდიდეებია. x ფრენის სიშორე იცვლება მხოლოდ α კუთხის ცვლილების შედეგად. ფრენის სიშორის უდიდესი მნიშვნელობის გასაგებად, $dx/d\alpha$ უნდა გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ:

$$\frac{v_0^2}{g}\left(2\cos2\alpha+2tg\beta\cdot\sin2\alpha\right)=0 \;\;=>\;\; ctg2\alpha=-tg\beta \;\;=>\;\; ctg2\alpha=ctg\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) \;\;=>$$

$$2\alpha=\frac{\pi}{2}+\beta \;\;=>\;\; \alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right).$$

პასუხი. $\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, ე.ი. ჭურვის ფრენის სიშორე შეესაბამება იმ კუთხის ნახევარს, რომელსაც ორდინატთა ღერძის უარყოფითი მიმართულება ადგენს ფერდობთან.

ამოცანა 8.12. წერტილის მოძრაობის განტოლებებს პოლარულ კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე: $r=ae^{kt}$ და $\varphi=kt$, სადაც a და k მოცემული მუდმივი სიდიდეებია. იპოვეთ წერტილის ტრაექტორიის განტოლება, სიჩქარე, სრული, მხები და ნორმალური აჩქარებები, აგრეთვე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი, როგორც r რადიუს-ვექტორის ფუნქციები.

ამოხსნა. მოძრაობის განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი: ადვილად მივიღებთ: $r=ae^{\varphi}$. მივიღეთ, რომ წერტილის ტრაექტორია არის ლოგარითმული ხვია.

წერტილის სიჩქარის გეგმილების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (8.8.3) ფორმულები, მივიღებთ:

$$v_r=\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(ae^{kt}\right)=ake^{kt}=kr\,,\quad v_\varphi=r\frac{d\varphi}{dt}=r\frac{d}{dt}\left(kt\right)=rk \;\;=>\;\; v=\sqrt{2}kr\,.$$

წერტილის აჩქარების გეგმილები გამოვთვალოთ (8.8.5) ფორმულებით:

$$w_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{d}{dt}\left(ake^{kt}\right)-r\left[\frac{d}{dt}\left(kt\right)\right]^2=ak^2e^{kt}-rk^2=rk^2-rk^2=0\,,$$

$$w_\varphi=r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}=r\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(kt\right)}{dt}\right)-2krk=r\frac{d\left(k\right)}{dt}-2k^2r=2k^2r \;\;=>\;\; w=2k^2r\,.$$

მხები აჩქარების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (8.8.7) ფორმულა, მივიღებთ:

$$w_\tau = \frac{kr\cdot 0 + kr\cdot 2k^2 r}{\sqrt{2}kr} = \sqrt{2}k^2 r\ .$$

ნორმალური აჩქარების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (8.8.8) ფორმულა, მივიღებთ:

$$w_n = \frac{\left|kr\cdot 2k^2 r - kr\cdot 0\right|}{\sqrt{2}kr} = \sqrt{2}k^2 r\ .$$

ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი გამოვთვალოთ (8.8.10) ფორმულით, მივიღებთ:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\left(\sqrt{2}kr\right)^2}{\sqrt{2}k^2 r} = \sqrt{2}r.$$

გამოვთვალოთ სიმრუდის რადიუსი (8.8.9) ფორმულით. ამისათვის წინასწარ უნდა გამოვთვალოთ $r = ae^{\varphi}$ ფუნქციის $\dot{r} = \dfrac{dr}{d\varphi}$ და $\ddot{r} = \dfrac{d^2 r}{d\varphi^2}$ წარმოებულები. ადვილად მივიღებთ: $\dot{r} = ae^{\varphi} = r$ => $\ddot{r} = r$. მაშინ (8.8.9) გვაძლევს:

$$\rho = \frac{\left(r^2+\dot{r}^2\right)^{3/2}}{r^2+2\dot{r}^2 - r\ddot{r}} = \frac{\left(r^2+r^2\right)^{1,5}}{r^2+2r^2-rr} = \frac{\left(2r^2\right)^{3/2}}{2r^2} = \frac{2\sqrt{2}r^3}{2r^2} = \sqrt{2}r.$$

ახლა სიმრუდის რადიუსის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (8.8.10) ფორმულა:

$$\rho = \frac{\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)^{3/2}}{r\,\dot{r}\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}^2\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^3 - r\,\ddot{r}\,\dot{\varphi}}\ .$$

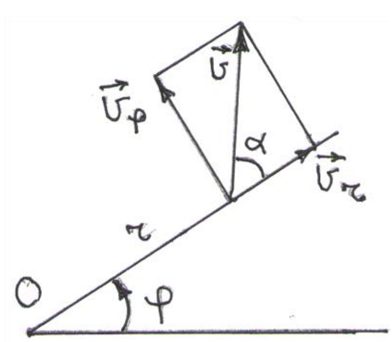
ზემოთ გამოთვლილი გვაქვს: $\dot{r} = kr$, $\dot{\varphi} = k$ => $\ddot{r} = k^2 r$, $\ddot{\varphi} = 0$ =>

$$\rho = \frac{\left[(kr)^2 + r^2k^2\right]^{3/2}}{r\,kr\cdot 0 + 2k^2r^2k + r^2k^3 - r\,k^2r\,k} = \frac{\left(2r^2k^2\right)^{3/2}}{2k^3r^2 + k^3r^2 - k^3r^2} = \frac{2\sqrt{2}k^3r^3}{2k^3r^2} = \sqrt{2}r\ .$$

პასუხი. $r = ar^{\varphi},\ \ v = \sqrt{2}kr,\ \ w_\tau = \sqrt{2}k^2 r,\ \ w_n = \sqrt{2}k^2 r,\ \ w = 2k^2 r,\ \ \rho = \sqrt{2}r.$

ამოცანა 8.13. წერტილი მოძრაობს ისე, რომ მისი რადიუს-ვექტორი მუდმივ α კუთხეს ადგენს სიჩქარესთან (ნახ. 8.15). განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (8.8.3) ფორმულები: $v_r = \dfrac{dr}{dt}$, $v_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt}$. პირობის თანახმად, $v_\varphi = v_r\, tg\alpha$, მაშინ $r\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{dr}{dt}tg\alpha$ =>



$$\frac{dr}{r} = ctg\alpha\, d\varphi \quad => \quad \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} = \int_0^{\varphi} ctg\alpha\, d\varphi \quad =>$$

$$\ln r\,\big|_{r_0}^{r} = ctg\alpha\cdot\varphi\,\big|_0^{\varphi} \quad => \quad \ln r - \ln r_0 = \varphi\ ctg\alpha$$

$$=> \quad \ln\frac{r}{r_0} = \varphi\ ctg\alpha \quad => \quad \frac{r}{r_0} = e^{\varphi\, ctg\alpha} \quad =>$$

$$r = r_0\, e^{\varphi\, ctg\alpha}\,. \qquad (ა)$$

ნახ. 8.15

(ა) არის წერტილის მოძრაობის განტოლება პოლარულ კოორდინატებ-ში. ამ მრუდს **ლოგარითმული სპირალი (ხვია)** ეწოდება.

როცა $\alpha = 90^\circ$, მაშინ $r = r_0$, ე.ი. წერტილი მოძრაობს r_0 რადიუსიან წრეწირზე.

როცა $\alpha = 0$, მაშინ $v_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$ => $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$ => $\varphi = \varphi_0 = const$, ე.ი. წერტილი მოძრაობს წრფივად რადიუს-ვექტორის გასწვრივ.

თავი IX

მყარი (არადეფორმადი) სხეულის კინემატიკა

მყარი სხეულის მოდელი. მყარი სხეულის უმარტივესი სახის მოძრაობები

ათვლის სისტემის მიმართ მყარი სხეულის მდებარეობის დასადგენად ავიღოთ მისი რაიმე ერთ წრფეზე არმდებარე სამი წერტილი. ამ სამიდან, თუ დავამაგრებთ ერთ წერტილს, მაშინ სხეული იბრუნებს ამ წერტილის გარშემო; თუ დავამაგრებთ ორ წერტილს, მაშინ სხეული იბრუნებს ამ წერტილებზე გამავალი წრფის გარშემო, ხოლო თუ დავამაგრებთ სამივე წერტილს, მაშინ სხეული იქნება უძრავი. ამგვარად, მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება მისი ერთ წრფეზე არმდებარე სამი წერტილით. შევაერთოთ ეს წერტილები ერთმანეთთან მონაკვეთებით. მივიღებთ სამკუთხედს, რომელიც კინემატიკაში წარმოადგენს მყარი სხეულის მოდელს. ამ სამ-კუთხედის მოძრაობა სავსებით განსაზღვრავს მასთან მკვიდრად დაკავშირებულ ნე-ბისმიერი მყარი სხეულის მოძრაობას.

მყარი სხეულის კინემატიკაში განიხილება შემდეგი ორი ძირითადი ამოცანა:

1. სხეულის, როგორც ერთი მთლიანი ობიექტის, მოძრაობის მოცემა და მოძ-რაობის კინემატიკური მახასიათებლების განსაზღვრა;

2. სხეულის ცალკეული წერტილების მოძრაობის კინემატიკური მახასიათებ-ლების განსაზღვრა.

მყარი სხეულის კინემატიკაში უპირველესად შეისწავლება გადატანითი მოძ-რაობა და ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო. ეს მოძრაობები ყველაზე მარტივი მოძ-რაობებია და წარმოადგენენ სხეულის რთული მოძრაობის შემდგენ ნაწილებს.

9.1. მყარი სხეულის კინემატიკის ძირითადი თეორემა (გრასჰოფის თეორემა)

თეორემა. აბსოლუტურად მყარი სხეულის ორი ნებისმიერი წერტილის სიჩქა-რეების გეგმილები ამ წერტილებზე გამავალ წრფზე, ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. სხეულის ორი ნებისმიერი A და B წერტილის სიჩქარეები აღვნიშნოთ $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$-თი. ამ წერტილებზე გავატაროთ წრფე და სიჩქარეები დავშალოთ ამ წრფისა და მისი მართობი მიმართულების გასწვრივ (ნახ. 10.6). მივიღებთ:

$$\vec{v}_A = \vec{v}\,'_A + \vec{v}\,''_A, \quad \vec{v}_B = \vec{v}\,'_B + \vec{v}\,''_B. \tag{91.1}$$

სხეული აბსოლუტურად მყარია, ამიტომ

$$\vec{v}\,'_A = \vec{v}\,'_B \tag{9.12}$$

(წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიცვლება მანძილი A და B წერტილებს შორის).

(9.1.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\left|\vec{v}\,'_A\right| = \left|\vec{v}\,'_B\right| \quad <=> \quad \text{გეგმ}_{AB}\left(\vec{v}_A\right) = \text{გეგმ}_{AB}\left(\vec{v}_B\right).$$

თეორმა დამტკიცებულია.

ცხადია, ეს თეორემა შეეხება არა მარტო ორ წერტილს, არამედ მათზე გამავალი წრფის ყველა წერტილს, ამიტომ თეორემა შეგვიძლია ასეც ჩამოვაყალიბოთ: **სხეულში გავლებული წრფის წერტილების სიჩქარეების გეგმილები ამავე წრფეზე, ერთმანეთის ტოლია.**

დამტკიცებულ თეორემას **გრასჰოფის თეორემას** უწოდებენ.

ეს თეორემა სამართლიანია აბსოლუტურად მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობისთვის.

ამ თეორემის გამოყენებით ძალიან მარტივად გავიგებთ სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის მოდულს (ან მიმართულებას), თუ ვიცით ამ სიჩქარის მიმართულება (ან მოდული) და ამავე სხეულის სხვა რომელიმე წერტილის სიჩქარე.

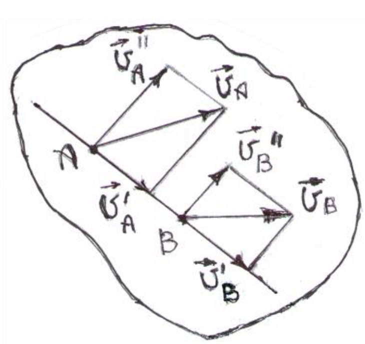
ამ თეორემას განსაკუთრებით დიდი გამოყენება აქვს მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას.

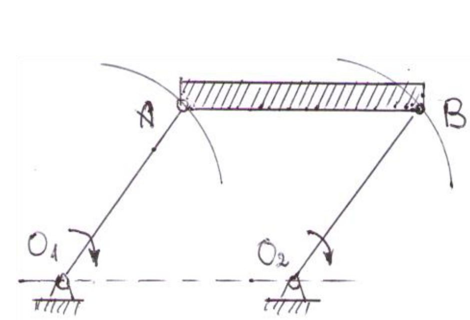
9.2. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

განსაზღვრა. სხეულის ისეთ მოძრაობას, რომლის დროსაც ამ სხეულში გავლებული ყოველი წრფე გადაადგილდება ისე, რომ პარალელური რჩება თავისი პირვანდელი მდებარეობის, **გადატანითი მოძრაობა** ეწოდება.

საზოგადოდ, გადატანითი მოძრაობა არ არის წრფივი მოძრაობა. ამ დროს სხეულის წერტილების ტრაექტორია შეიძლება იყოს ნებისმიერი წირი. მაგალითად,

AB საუღლის O_1A და O_2B ($O_1A = O_2B$) მრუდმხარების გარშემო ბრუნვისას, საუღლე ასრულებს გადატანით მოძრაობას (მასში გავლებული ნებისმიერი წრფე თავისი პირვანდელი მდებარეობის პარალელური რჩება), თუმცა საუღლის წერტილები მოძრაობენ წრეწირებზე (ნახ. 9.2).





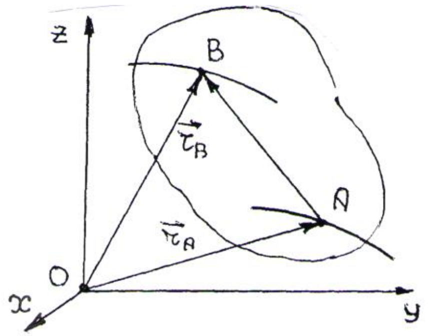
ნახ. 9.1　　　　　　　　　　　　　　　　ნახ. 9.2

სხეულის გადატანითი მოძრაობის თვისებებს გამოსახავს შემდეგი **თეორემა**: გადატანითი მოძრაობისას სხეულის ყველა წერტილი აღწერს ერთნაირ ტრაექტორიებს (წირებს, რომლებიც ერთიმეორეზე დადებისას, ერთმანეთს ემთხვევა) და დროის ყოველ მომენტში აქვთ ტოლი სიჩქარეები და ტოლი აჩქარებები.

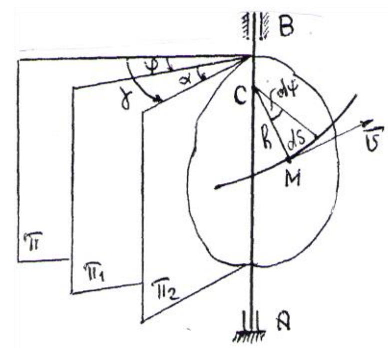
დამტკიცება. განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელიც გადატანით მოძრაობს დეკარტის $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ (ნახ. 9.3). მისი ნებისმიერი ორი A და B წერტილის რადიუს-ვექტორები სათავის მიმართ აღვნიშნოთ შესაბამისად $\vec{r}_A$ და $\vec{r}_B$-თი. გავატაროთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი, მაშინ

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{AB}. \tag{9.2.1}$$

$\overrightarrow{AB}$ ვექტორს აქვს მუდმივი სიგრძე (ის აერთებს აბსოლუტურად მყარი სხეულის ორ წერტილს!) და მუდმივი მიმართულება (სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას!), ამიტომ ის მუდმივი ვექტორია. მაშინ (9.2.1)-დან ვღებულობთ: B წერტილის ტრაექტორიის წერტილები მიიღება A წერტილის ტრაექტორიის ყველა წერტილის ერთი და იმავე მუდმივი $\overrightarrow{AB}$ გადაადგილებით. ცხადია, ეს ტრაექტორიები ერთმანეთს დაემთხვევა, თუ ერთს მეორეზე დავადებთ.



ნახ. 9.3



ნახ. 9.4

(9.2.1) ტოლობა გავაწარმოოთ დროით და მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt}.$$

მაგრამ $\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$, $\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B$, $\dfrac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} = 0$, ამიტომ

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{w}_A = \vec{w}_B .$$

ამგვარად, სხეულის ორ A და B წერტილს დროის ყოველ მომენტში ტოლი სიჩქარეები და ტოლი აჩქარებები აქვთ. ეს წერტილები ჩვენ შევარჩიეთ ნებისმიერად, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ: გადატანითი მოძრაობისას სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი ტრაექტორიები, ერთნაირი სიჩქარეები და ერთნაირი აჩქარებები აქვთ.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ სხეულის გადატანითი მოძრაობისას თუ განვსაზღვრეთ მისი რომელიმე ერთი წერტილის მოძრაობა, ამით განსაზღვრული გვექნება მთელი სხეულის მოძრაობა. მივიღეთ, რომ გადატანითი მოძრაობისას სხეულის მოძრაობის შესწავლა დაიყვანება წერტილის მოძრაობის შესწავლაზე.

მივიღეთ: სხეულის გადატანითი მოძრაობის კანონის დასადგენად საკმარისია ვიცოდეთ მისი ერთი ნებისმერი წერტილის მოძრაობის კანონი.

ადვილად მტკიცდება, რომ **თუ მყარი სხეულის ორ ნებისმიერ A და B წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვთ, მაშინ სხეული მოძრაობს გადატანით.** ამის დასამტკიცებლად $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ ტოლობა უნდა გადავწეროთ $d\vec{r}_A = d\vec{r}_B$ სახით და შემდეგ ინტეგრირებით მიიღებთ, რომ ეს წერტილები ერთნაირი კანონით მოძრაობენ.

კარგად დავიმახსოვროთ: სხეულის სიჩქარისა და აჩქარების ცნებები არ არსებობს. როდესაც ლაპარაკია სხეულის სიჩქარესა და აჩქარებაზე, ამ დროს იგულისხმება სხეულის გადატანითი სიჩქარე და გადატანითი აჩქარება. არაგადატანითი მოძრაობისას სხეულის წერტილებს, ზოგადად, სხვადასხვა სიჩქარე და სხვადასხვა აჩქარება აქვს.

9.3. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო. კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება

განსაზღვრა. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო ეწოდება ისეთ მოძრაობას, რომლის დროსაც სხეულის (ან მასთან უძრავად დაკავშირებული) ორი წერტილი მთელი მოძრაობის განმავლობაში უძრავი რჩება. უძრავ წერტილებზე გამავალ წრფეს **ბრუნვის ღერძი** ეწოდება.

აბსოლუტურად მყარი სხეულის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ბრუნვის ღერძის ყველა წერტილი უძრავია, ხოლო დანარჩენი წერტილები მოძრაობს წრეწირებზე, რომელთა სიბრტყეები ბრუნვის ღერძის მართობია, ცენტრები კი ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს.

ბრუნვის ღერძზე გავატაროთ უძრავი π ნახევარსიბრტყე და სხეულთან მკვიდრად დაკავშირებული π_1 ნახევარსიბრტყე (ნახ. 9.4) (ცხადია, π_1 ნახევარსიბრტყე იბრუნებს სხეულთან ერთად). სხეულის მდებარეობა დროის ნებისმიერ მომენტში ცალსახად იქნება განაზღვრული, თუ გვეცოდინება φ კუთხე, რომელსაც მოძრავი π_1 ნახევარსიბრტყე ადგენს უძრავ π ნახევარსიბრტყესთან. φ კუთხეს ჩავთვლით დადებითად, თუ მისი ათვლა ხდება უძრავი ნახევარსიბრტყიდან საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით (იმ დამკვირვებლისთვის, რომელიც იყურება ბრუნვის

ღერძის დადებითი ბოლოდან). იმისათვის, რომ ვიცოდეთ სხეულის მდებარეობა დროის ნებისმიერ მომენტში, უნდა ვიცოდეთ φ კუთხე, როგორც დროის ფუნქცია, ე.ი.

$$\varphi = f(t), \tag{9.3.1}$$

სადაც φ იზომება რადიანებით.

(9.3.1) განტოლება გამოსახავს **უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის განტოლებას (კანონს).**

სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის ძირითადი კინემატიკური მახასიათებლებია ω კუთხური სიჩქარე და ε კუთხური აჩქარება. შევთანხმდეთ, რომ ω და ε ასოებით აღვნიშნავთ კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების როგორც რიცხვით მნიშვნელობას, ისე მათ მოდულებს, თუ, ცხადია, ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას.

შემოვიღოთ სხეულის კუთხური სიჩქარის ცნება. ვთქვათ, $\Delta t = t_1 - t$ დროის შუალედში სხეული შემობრუნდა $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ კუთხით. $\Delta\varphi/\Delta t$ ფარდობას ვუწოდოთ საშუალო კუთხური სიჩქარე და თუ მას აღვნიშნავთ $\omega_{\text{საშ}}$-თი, მაშინ

$$\omega_{\text{საშ}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

განსაზღვრა. $\omega_{\text{საშ}}$-ს ზღვარს, როცა $\Delta t \to 0$, ვუწოდოთ **სხეულის კუთხური სიჩქარე**. აღვნიშნოთ იგი ω ასოთი, მაშინ

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{9.3.2}$$

მივიღეთ: სხეულის კუთხური სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში უდრის მობრუნების კუთხის წარმოებულს დროით. თუ სხეული ბრუნავს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულსბით, მაშინ $\omega > 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\omega < 0$.

კუთხური სიჩქარის განზომილებაა $1/T = T^{-1}$. მის ერთეულად მიღებულია რად/წმ ან რაც იგივეა – 1/წმ, ვინაიდან რადიანი უგანზომილებო სიდიდეა.

განსაზღვრა. სხეულის ვექტორული კუთხური სიჩქარე ეწოდება ისეთ $\vec{\omega}$ ვექტორს, რომლის მოდული უდრის $|\omega|$-ს და მიმართულია ბრუნვის ღერძის გასწვრივ იმ მიმართულებით, საიდანაც სხეულის ბრუნვა ჩანს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 9.5). ასეთი ვექტორი განსაზღვრავს კუთხური სიჩქარის მოდულს, ბრუნვის ღერძს და ბრუნვის მიმართულებას ამ ღერძის გასწვრივ.

განვსაზღვროთ კუთხური აჩქარება, რომელიც ახასიათებს კუთხური სიჩქარის ცვლილებას დროის მიხედვით. ვთქვათ, $\Delta t = t_1 - t$ დროის შუალედში კუთხური სიჩქარე იცვლება $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$ სიდიდით, მაშინ საშუალო სკალარული კუთხური აჩქარების რიცხვითი მნიშვნელობა იქნება $\varepsilon_{\text{საშ}} = \Delta\omega/\Delta t$.

განსაზღვრა. $\varepsilon_{\text{საშ}}$-ს ზღვარს, როცა $\Delta t \to 0$, ვუწოდოთ **სხეულის კუთხური აჩქარება**. აღვნიშნოთ იგი ε ასოთი, მაშინ

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{9.2.3}$$

მივიღეთ: სხეულის კუთხური აჩქარება დროის მოცემულ მომენტში უდრის კუთხური სიჩქარის წარმოებულს ან მობრუნების კუთხის მეორე რიგის წარმოებულს დროით.

კუთხური აჩქარების განზომილებაა $1/T^2 = T^{-2}$. მის ერთეულად მიღებულია რად/წმ^2 ან რაც იგივეა – 1/წმ^2.

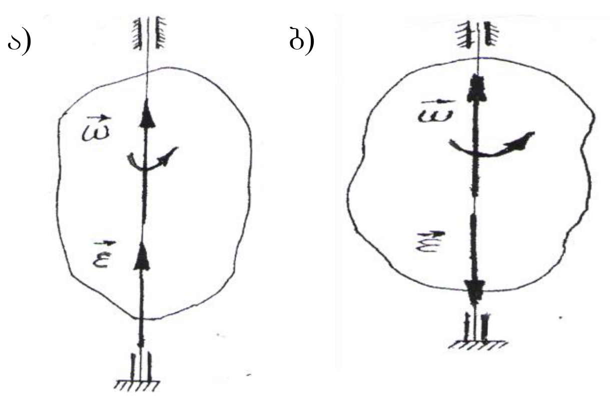
იმ შემთხვევაში, როცა კუთხური სიჩქარის მოდული დროის მიხედვით იზრდება, სხეულის ბრუნვა აჩქარებულია, თუ იკლებს – შენელებული. აჩქარებული ბრუნვის დროს ω და ε სიდიდეებს ერთნაირი ნიშნები აქვთ, ხოლო შენელებულის დროს – სხვადასხვა.

განსაზღვრა. სხეულის ვექტორული კუთხური აჩქარება ვუწოდოთ ისეთ

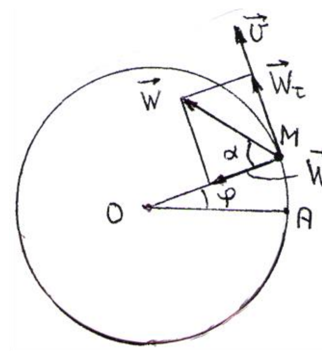
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{9.3.4}$$

ვექტორს, რომელიც მიმართულია ბრუნვის ღერძის გასწვრივ. როცა $\vec{\omega}$ და $\vec{\varepsilon}$ სიდიდეებს ერთნაირი მიმართულებები აქვთ, მაშინ ბრუნვა აჩქარებულია, ხოლო როცა სხვადასხვა – შენელებული.

დავამტკიცოთ მეტად მნიშვნელოვანი **თეორემა:** უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი კუთხური სიჩქარე და ერთნაირი კუთხური აჩქარება აქვს.



ნახ. 9.5



ნახ. 9.6

დამტკიცება. ბრუნვის ღერძზე გავატაროთ სხეულთან მკვიდრად დაკავშირებული π_2 ნახევარსიბრტყე (ნახ. 9.4). მის მიერ π_1 ნახევარსიბრტყესთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ α-თი, მაშინ π_2-ის მიერ π-სთან შედგენილი კუთხე იქნება

$$\gamma = \varphi + \alpha \,. \tag{9.3.5}$$

π_1 და π_2 ერთ და იმავე სხეულთან მკვიდრად დაკავშირებული ნახევარსიბრტყეებია, ამიტომ ისინი ერთმანეთის მიმართ არ გადაადგილდებიან. ამგვარად, $\alpha = const$.

(9.3.5) ტოლობა გავაწარმოოთ დროით და მივიღებთ:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}. \tag{9.3.6}$$

$d\gamma/dt$ და $d\varphi/dt$ შესაბამისად π_2 და π_1 ნახევარსიბრტყეებში მდებარე წერტილების კუთხური სიჩქარეებია. აღვნიშნოთ ისინი ω_2 და ω_1-ით. ვინაიდან $d\alpha/dt=0$, ამიტომ

$$\omega_2=\omega_1 \quad => \quad \frac{d\omega_2}{dt}=\frac{d\omega_1}{dt} \quad => \quad \varepsilon_2=\varepsilon_1.$$

ჩვენ π_2 ნახევარსიბრტყე ავიღეთ ნებისმიერად, ამიტომ ვღებულობთ, რომ სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი კუთხური სიჩქარე და ერთნაირი კუთხური აჩქარება აქვს. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

9.4. თანაბარი და თანაბარცვლადი ბრუნვა

განსაზღვრა. ბრუნვას ეწოდება **თანაბარი,** თუ მთელი მოძრაობის განმავლობაში სხეულის კუთხური სიჩქარე არ იცვლება, ე.ი. $\omega=const$. დავუშვათ, რომ როცა $t=t_o$, მაშინ $\varphi=\varphi_o$. თუ მოვიქცევით ზუსტად ისე, როგორც მოვიქეცით §8.7-ში, (9.3.2) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\varphi=\varphi_o+\omega(t-t_o). \tag{9.4.1}$$

კერძოდ,

$$\varphi=\varphi_o+\omega t \qquad (t_o=0), \tag{9.4.2}$$

$$\varphi=\omega(t-t_o) \qquad (\varphi_o=0), \tag{9.4.3}$$

$$\varphi=\omega t \qquad (t_o=\varphi_o=0). \tag{9.4.4}$$

განსაზღვრა. ბრუნვას ეწოდება **თანაბარცვლადი,** თუ მთელი მოძრაობის განმავლობაში სხეულის კუთხური აჩქარება არ იცვლება, ე.ი. $\varepsilon=const$. დავუშვათ, რომ როცა $t=t_o$, მაშინ $\varphi=\varphi_o$, $\omega=\omega_o$. თუ მოვიქცევით ზუსტად ისე, როგორც მოვიქეცით §8.8-ში, (9.3.3) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\omega=\omega_o+\varepsilon(t-t_o), \tag{9.4.5}$$

$$\varphi=\varphi_o+\omega_o(t-t_o)+\frac{1}{2}\varepsilon(t-t_o)^2. \tag{9.4.6}$$

ამ ფორმულებს აქვთ ბევრი კერძო შემთხვევა. მაგალითად, როცა $t_o=\varphi_o=0$, მაშინ

$$\omega=\omega_o+\varepsilon t, \tag{9.4.7}$$

$$\varphi=\omega_o t+\frac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{9.4.8}$$

როცა ბრუნვა თანაბარშენელებულია, მაშინ

$$\omega=\omega_o-\varepsilon t, \tag{9.4.9}$$

$$\varphi=\omega_o t-\frac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{9.4.10}$$

დავუშვათ, რომ დროის რაიმე შუალედში თანაბარი ბრუნვისას სხეულმა შეასრულა n ბრუნი. მაშინ $2\pi n$ არის განსახილველ დროის შუალედში სხეულის

მიერ შემოწერილი კუთხე, ე.ი. $\varphi = 2\pi n$. თუ n არის დროის ერთეულში შესრულებული ბრუნთა რიცხვი, მაშინ $2\pi n$ არის სხეულის კუთხური სიჩქარე, ე.ი. $\omega = 2\pi n$. აღსანიშნავია, რომ n აქვს კუთხური სიჩქარის განზომილება.

9.5. წერტილის მოძრაობა წრეწირზე

ზემოთ (იხ. §9.4) აღვნიშნეთ, რომ უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას აბსოლუტურად მყარი სხეულის წერტილები მოძრაობენ წრეწირებზე, ამიტომ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია წერტილის წრეწირზე მოძრაობის გამოკვეთილად შესწავლა.

ვთქვათ, M წერტილი მოძრაობს R რადიუსიან წრეწირზე (ნახ. 9.6). მივიღოთ, რომ წრეწირის A წერტილი ათვლის წერტილია, მაშინ წრეწირზე M წერტილის მდებარეობა ცალსახად განისაზღვრება AM რკალით. თუ ამ რკალის სიგრძეს აღვნიშნავთ s-ით, ხოლო AOM კუთხის სიდიდეს - φ ასოთი, მაშინ

$$s = R\varphi. \tag{9.5.1}$$

(9.5.1) წარმოადგენს წერტილის წრეწირზე მოძრაობის ბუნებრივ განტოლებას.

გავაწორმოოთ (9.4.1) ტოლობა დროით, მივიღებთ:

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad =>$$

$$v = R\omega. \tag{9.5.2}$$

მივიღეთ: წრეწირზე მოძრაობისას წერტილის სკალარული სიჩქარე უდრის წრეწირის რადიუსისა და სკალარული კუთხური სიჩქარის ნამრავლს.

ვექტორული სიჩქარის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{v}$ ვექტორი მდებარეობს ტრაექტორიის M წერტილზე გამავალ მხებზე.

გავაწარმოოთ (9.5.2) ტოლობა დროით, მივიღებთ:

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}; \quad \frac{dv}{dt} = w, \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \quad =>$$

$$w = R\varepsilon. \tag{9.5.3}$$

მივიღეთ: წრეწირზე მოძრაობისას წერტილის სკალარული აჩქარება უდრის წრეწირის რადიუსისა და სკალარული კუთხური აჩქარების ნამრავლს.

განვიხილოთ მხები და ნორმალური აჩქარებების გამოსათვლელი (8.7.5) ფორმულები. გავიხსენოთ, რომ წრეწირისათვის $\rho = R$ და მივიღებთ:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\omega\right) = R\varepsilon, \tag{9.5.4}$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\left(R\omega\right)^2}{R} = R\omega^2. \tag{9.5.5}$$

$\vec{w}_n$ ნორმალური აჩქარება ყოველთვის მიმართულია წრეწირის ცენტრისკენ, ამიტომ მას **ცენტრისკენულ აჩქარებას** უწოდებენ.

$\vec{w}$-ს მოდულისათვის (9.5.4) და (9.5.5) ფორმულები გვაძლევენ:

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, R. \tag{9.5.6}$$

აღვნიშნოთ $\vec{w}$ ვექტორის მიერ მთავარ ნორმალთან შედგენილი კუთხე α-თი და ადვილად მივიღებთ:

$$tg\alpha = \frac{|\vec{w}_\tau|}{|w_n|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (9.5.7)$$

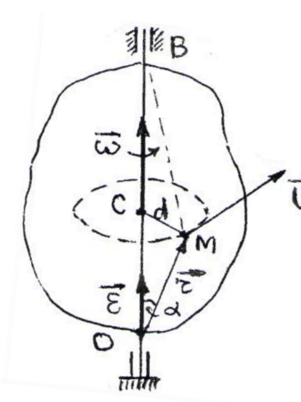
9.6. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილების სიჩქარე. ეილერის ფორმულა

განხილულ პარაგრაფებში დავადგინეთ უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის, როგორც ერთი მთლიანი ობიექტის, კინემატიკური მახასიათებლები – კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება, ე.ი. განვიხილეთ მყარი სხეულის კინემატიკის პირველი ძირითადი ამოცანა. გადავიდეთ კინემატიკის მეორე ძირითად ამოცანაზე – შევისწავლოთ ცალკეული წერტილის მოძრაობა.

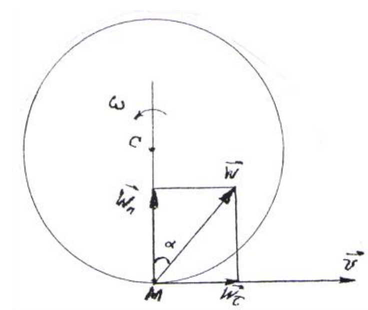
გამოვთვალოთ ბრუნვის ღერძიდან d მანძილით დაშორებული M წერტილის სკალარული სიჩქარე (ნახ. 9.7). რადგანაც წერტილი მოძრაობს ღერძის მართობ სიბრტყეში მდებარე წრეწირზე, რომლის ცენტრი მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე, ამიტომ (9.4.1) ფორმულის თანახმად

$$v = d\omega. \qquad (9.6.1)$$

v სიჩქარეს კუთხურისგან განსხვავებით, **ხაზოვან სიჩქარეს ან წრიულ სიჩქარესაც უწოდებენ.** მისი გამომსახველი ვექტორი მდებარეობს ბრუნვის ღერძის მართობ სიბრტყეში.



ნახ. 9.7



ნახ. 9.8

ბრუნვის ღერძის ნებისმიერი O წერტილიდან გავავლოთ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორი. ნახ. 9.7-დან $d = |\vec{r}|\sin\alpha$ და (9.6.1) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}|d = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha.$$

მეორე მხრივ $\qquad |\vec{\omega}\times\vec{r}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha.$

როგორც ვხედავთ, $\left|\vec{v}\right|=\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right|$, ე.ი. $\vec{\omega}\times\vec{r}$ ვექტორული ნამრავლის მოდული უდრის M წერტილის $\vec{v}$ ვექტორული სიჩქარის მოდულს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\vec{\omega}\times\vec{r}$ და $\vec{v}$ ვექტორებს ერთნაირი მიმართულება და ერთნაირი განზომილება აქვთ. ამგვარად,

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\ . \tag{9.6.2}$$

მივიღეთ: უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის ნებისმიერი წერტილის ვექტორული სიჩქარე უდრის სხეულის ვექტორული კუთხური სიჩქარისა და ღერძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის ვექტორულ ნამრავლს.

(9.6.2) ტოლობას **ეილერის ფორმულა** ეწოდება.

გამოვთვალოთ $\vec{\omega}$ ვექტორის ვექტორული მომენტი M წერტილის მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ $\vec{\omega}$ მოდებულია O წერტილში და გვექნება:

$$\vec{M}_o\left(\vec{\omega}\right)=\overrightarrow{MO}\times\vec{\omega}=-\vec{\omega}\times\overrightarrow{MO}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}=\vec{\omega}\times\vec{r}\ .$$

$$\vec{v}=\vec{M}_o\left(\vec{\omega}\right). \tag{9.6.3}$$

მივიღეთ: უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დროს ნებისმიერი M წერტილის ვექტორული სიჩქარე უდრის $\vec{\omega}$ ვექტორული კუთხური სიჩქარის ვექტორულ მომენტს M წერტილის მიმართ.

$\vec{\omega}$ ვექტორის გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე აღვნიშნოთ ω_x, ω_y,ω_z-ით, O წერტილის კოორდინატები - x_o,y_o,z_o-ით, ხოლო M წერტილისა - x,y,z-ით. მაშინ $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორის გეგმილები ღერძებზე ტოლია $x-x_o$, $y-y_o$, $z-z_o$-ის (იგულისხმება, რომ O წერტილი არ არის კოორდინატთა სათავე). დავაგეგმილოთ (9.6.2) ტოლობა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} v_x&=\omega_y\left(z-z_o\right)-\omega_z\left(y-y_o\right),\\ v_y&=\omega_z\left(x-x_o\right)-\omega_x\left(z-z_o\right),\\ v_z&=\omega_x\left(y-y_o\right)-\omega_y\left(x-x_o\right). \end{aligned} \tag{9.6.4}$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები.

ა) ბრუნვის ღერძი გადის კოორდინატთა სათავეზე და ეს წერტილი არის O. ამ შემთხვევაში $x_o=y_o=z_o=0$ და (9.6.4) ასეთი სახით ჩაიჩერება:

$$v_x=\omega_z y-\omega_y z\,,\qquad v_y=\omega_z x-\omega_x z\,,\qquad v_z=\omega_x y-\omega_y x\,. \tag{9.6.5}$$

ბ) ბრუნვის ღერძი z ღერძის პარალელურია, მაშინ $\omega_x=\omega_y=0$, ამიტომ (9.5.4) ასე გადაიწერება:

$$v_x=-\omega\left(y-y_o\right),\qquad v_y=\omega\left(x-x_o\right),\qquad v_z=0\,, \tag{9.6.6}$$

სადაც $\omega=\omega_z$.

გ) ბრუნვის ღერძი ემთხვევა z ღერძს, ამიტომ $x_o=y_o=z_o=\omega_x=\omega_y=0$ და

$$v_x=-\omega y,\ v_y=\omega x,\ v_z=0. \tag{9.6.7}$$

9.7. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილების აჩქარება

გამოვთვალოთ ბრუნვის ღერძიდან d მანძილით დაშორებული M წერტილის აჩქარება (ნახ. 9.7). ვისარგებლოთ (9.5.4) და (9.5.5) ფორმულებით, რომლებიც ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებს:

$$w_\tau = d\varepsilon,\ w_n = d\omega^2. \qquad (9.7.1.)$$

$\vec{w}_n$ ნორმალური აჩქარება ყოველთვის მიმართულია MC რადიუსის გასწვრივ ბრუნვის ღერძისაკენ (ნახ. 9.8). $\vec{w}_\tau$ მხები აჩქარება სხეულის აჩქარებული ბრუნვისას მიმართულია მხების გასწვრივ წერტილის მოძრაობის მიმართულებით, ხოლო შენელებული ბრუნვისას – საწინააღმდეგოდ.

M წერტილის სრული აჩქარება

$$w = d\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ . \qquad (9.7.2)$$

წრეწირის რადიუსიდან $\vec{w}$ ვექტორის α გადახრის კუთხე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$tg\alpha = \frac{|\vec{w}_\tau|}{|\vec{w}_n|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (9.5.7)$$

გავაწარმოოთ (9.5.2) ტოლობა დროით, მივიღებთ: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) + \left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ <=>

$$\vec{w} = (\vec{\varepsilon}\times\vec{r}) + (\vec{\omega}\times\vec{v}) \quad => \qquad (9.7.3)$$

$$\vec{w}_\tau = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}, \quad \vec{w}_n = \vec{\omega}\times\vec{v}\ . \qquad (9.6.4)$$

(9.7.3) ფორმულა განსაზღვრავს უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილის ვექტორულ აჩქარებას.

(9.6.1), (9.7.1), (9.7.2) და (9.5.7) ფორმულების გამოყენებით შეგვიძლია განვსაზღროთ უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება. ჩამოთვლილი ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დასახასიათებლად საკმარისია ვიცოდეთ ერთი დამოუკიდებელი φ სიდიდე.

აღსანიშნავია, რომ თუ ვიცით ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობა, მაშინ იმავე ფორმულებით შეგვიძლია გავიგოთ ნებისმიერი მეორე წერტილის მოძრაობა და აგრეთვე მთლიანი სხეულის მოძრაობის მახასიათებლები.

9.8. მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

უძრავი ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვასთან დაკავშირებით ამოცანები შეიძლება დავყოთ ორ ძირითად ტიპად.

პირველი ტიპის ამოცანებში მოცემულია მყარი სხეულის ბრუნვის განტოლება და მოითხოვება კუთხური სიჩქარის, კუთხური აჩქარების და სხეულის წერტილის სიჩ-

ქარისა და აჩქარების განსაზღვრა. ამოცანა სასურველია ამოვხსნათ შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. კოორდინატთა სისტემას ვირჩევთ ისეთნაირად, რომ ერთ-ერთი ღერძი, კერძოდ z ღერძი, დაემთხვეს ბრუნვის ღერძს;

2. ვადგენთ მყარი სხეულის ბრუნვის განტოლებას, ე.ი. მობრუნების კუთხის დამოკიდებულებას დროზე;

3. მობრუნების კუთხის გაწარმოებით დროით გავიგებთ ბრუნვის ღერძზე კუთხური სიჩქარის გეგმილს;

4. მობრუნების კუთხის მეორედ გაწარმოებით დროით გავიგებთ ბრუნვის ღერძზე კუთხური აჩქარების გეგმილს;

5. განსაზღვრული კუთხური სიჩქარის საშუალებით გავიგებთ წერტილის სიჩქარეს და ნორმალურ აჩქარებას.

6. განსაზღვრული კუთხური აჩქარების საშუალებით გავიგებთ წერტილის მხებ აჩქარებას;

7. მხები და ნორმალური აჩქარებების საშუალებით ვსაზღვრავთ წერტილის სრული აჩქარების სიდიდესა და მიმართულებას.

მეორე ტიპის ამოცანებში ცნობილია მყარი სხეულის კუთხური სიჩქარე ან კუთხური აჩქარება და მოითხოვება მყარი სხეულის ბრუნვის განტოლების, წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრა. ამოცანა სასურველია ამოვხსნათ შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. ბრუნვის ღერძზე კუთხური აჩქარების გეგმილის გამომსახველი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირებით გავიგებთ კუთხური სიჩქარის გეგმილს; საინტეგრო მუდმივს განვსაზღვრავთ საწყისი პირობებით;

2. ბრუნვის ღერძზე კუთხური სიჩქარის გეგმილის გამომსახველი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირებით გავიგებთ ბრუნვის განტოლებას; საინტეგრო მუდმივს განვსაზღვრავთ საწყისი პირობებით;

3. უკვე განსაზღვრული კუთხური სიჩქარის გეგმილის საშუალებით გავიგებთ წერტილის სიჩქარეს და ნორმალურ აჩქარებას.

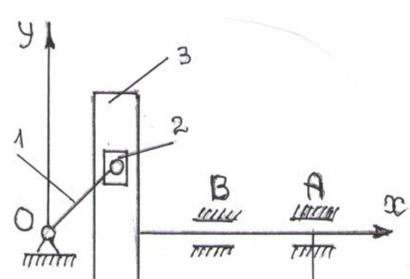
4. კუთხური აჩქარების საშუალებით გავიგებთ წერტილის მხებ აჩქარებას;

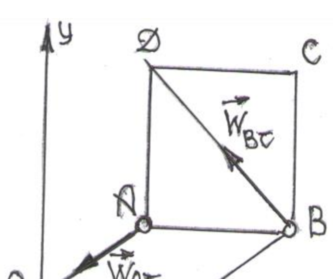
5. მხები და ნორმალური აჩქარებების საშუალებით ვსაზღვრავთ წერტილის სრული აჩქარების სიდიდესა და მიმართულებას.

ამოცანა 9.1. 1 მრუდმხარას ბრუნვის შედეგად 2 ცოციას გადატანით მოძრაობაში მოჰყავს 3 კულისა (ნახ. 9.9). კულისის მოძრაობის კანონია $x_A = 0,4 - 0,1\sin t^2$. განსაზღვრეთ კულისის B წერტილის სიჩქარე, როცა t=2 წმ-ს.

ამოხსნა. რადგანაც კულისა მოძრაობს გადატანით, ამიტომ მის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს => $v_B = v_A = \dot{x} = -0,2t\cos t^2$. როცა t=2, მაშინ $v_B =$ $= -0,2 \cdot 2\cos 4 = -0,4\cos 229,3^\circ = 0,4\cos 49^\circ 18' \approx 0,4 \cdot 0,6521 = 0,26084 \approx 0,261.$

პასუხი. 0,261.





ნახ. 9.9 ნახ. 9.10.

ამოცანა 9.2. *ABCD* კვადრატული ფირფიტა ასრულებს გადატანით მოძრაობას *Oxy* სიბრტყეში (ნახ. 9.10). განსაზღვრეთ *C* წერტილის აჩქარება, თუ *A* წერტილის ნორმალური აჩქარება w_{An}=4 მ/წმ^2, ხოლო *B* წერტილის მხები აჩქარება $w_{B\tau}$=3 მ/წმ^2.

ამოხსნა. რადგანაც კულისა მოძრაობს გადატანით, ამიტომ მის ყველა წერტილს ერთნაირი აჩქარება აქვს => $w_{C\tau} = w_{B\tau}$=3 მ/წმ^2 და $w_{Cn} = w_{An}$=4 3 მ/წმ^2 => w_C =5 მ/წმ^2.

პასუხი. 5 მ/წმ^2.

ამოცანა 9.3. განსაზღვრეთ კუთხური სიჩქარე: 1. წამის ისრის; 2. წუთის ისრის; 3. საათის ისრის; 4. დედამიწის ბრუნვისა თავისი ღერძის გარშემო იმ პირობით, რომ იგი ერთ სრულ ბრუნს 24 საათის განმავლობაში ასრულებს; 5. ლავალიეს ორთქლის ტურბინის ბრუნვის, რომელიც წუთში ასრულებს 15000 ბრუნს.

ამოხსნა. საათის სამივე ისარი, დედამიწა და ლავალიეს ორთქლის ტურბინა ბრუნავენ თანაბრად. ამასთან, წამის ისარი ერთ სრულ შემობრუნებას ანდომებს 60 წამს, წუთის ისარი – $60 \cdot 60$=3600 წამს, საათის ისარი - $60 \cdot 60 \cdot 12$=43200 წამს, ხოლო დედამიწა - $60 \cdot 60 \cdot 24$=86400 წამს. განსაზღვრის თანახმად,

1. წამის ისრისათვის $\omega = 2\pi/60 \approx 0{,}1047$ რად/წმ;

2. წუთის ისრისათვის $\omega = 2\pi/3600 \approx 0{,}001745$ რად/წმ;

3. საათის ისრისათვის $\omega = 2\pi/43200 \approx 0{,}0001454$ რად/წმ;

4. დედამიწისათვის $\omega = 2\pi/86400 \approx 0{,}0000727$ რად/წმ;

5. ტურბინა დროის ერთეულში, კერძოდ წუთში, ასრულებს $n = 15000$ ბრუნს, ამიტომ $\omega = n \cdot 2\pi = 15000 \cdot 6{,}28 = 94200$ რად/წთ=1570 რად/წმ.

ამოცანა 9.4. ლილვი უძრაობის მდგომარეობიდან იწყებს თანაბარაჩქარებულ ბრუნვას. პირველ 5 წამში იგი ასრულებს 12,5 ბრუნს. როგორია ლილვის კუთხური სიჩქარე 5 წამის ბოლოს? [64]

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (9.4.7) და (9.4.8) ფორმულები: $\omega = \omega_o + \varepsilon t$, $\varphi = \omega_o t + \dfrac{1}{2}\varepsilon t^2$.

პირობის თანახმად, $\omega_0 = 0$ და 5 წამის შემდეგ $\varphi = n \cdot t$ =12,5$\cdot$ $2\pi = 25\pi$ რად, ამიტომ $\omega = 5\varepsilon$, $25\pi = 25\varepsilon/2$ => $\omega = 10\pi$ რად/წმ.

პასუხი. $\omega = 10\pi$ რად/წმ.

ამოცანა 9.5. ძრავის გამორთვის მომენტიდან $n=1200$ ბრ/წთ-ის შესაბამისი კუთხური სიჩქარით მბრუნავი თვითმფრინავის პროპელერმა გაჩერებამდე შეასრულა 160 ბრუნი. რა დრო გავიდა ძრავის გამორთვიდან პროპელერის გაჩერებამდე, თუ ვიგულისხმებთ, რომ პროპელერის ბრუნვა თანაბარშენელებულია? [64]

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (9.4.9) და (9.4.10) ფორმულები: $\omega=\omega_o-\varepsilon t$, $\varphi=\omega_0 t-$ $-0,5\varepsilon t^2$. პირობის თანახმად, $\omega_0=1200\cdot 2\pi=2400\pi$ რად/წთ$=40\pi$ რად/წმ, $\omega=0$ და $\varphi=$ $=n\cdot t=\ 80\cdot 2\pi=\ =160\pi$ რად, ამიტომ $0=40\pi-\varepsilon t$, $160\pi=40\pi t-\varepsilon t^2/2$ => $t=8$ წმ.

პასუხი. 8 წმ.

ამოცანა 9.6. ნახ. 9.11-ზე გამოსახულ მექანიზმში BC საუღლის შუა A წერტილი მოძრაობს თანაბარაჩქარებულად. ამ წერტილს მხები აჩქარება $w_{A\tau}=5$ მ/წმ^2. საუღლის სიგრძე $BC=1$ მ, ხოლო მრუდმხარასი - $OB=DC=50$ სმ. საწყის მომენტში OB ღერო ჰორიზონტალურ მდებარეობაშია, ხოლო კუთხური სიჩქარე უდრის ნულს. გაიგეთ A წერტილის ტრაექტორია, მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და B წერტილის სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა. ნახ. 9.11-დან უშუალოდ ვღებულობთ:

$x_B=OB\cos\varphi=0,5\cos\varphi$ მ, $\quad y_B=0,5\sin\varphi$ მ => $\dot{x}_B=-0,5\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{dt}=-0,5\omega\sin\varphi$,

$\dot{y}_B=0,5\omega\cos\varphi$ =>

$$v_B=0,5\omega \text{ მ/წმ}, \qquad (ა)$$

სადაც $\omega=d\varphi/dt=\omega_{OB}$.

$x_A=OE+EF=0,5\cos\varphi+0,5$ მ, $y_A=0,5\sin\varphi$ მ => $(x_A-0,5)^2+y_A^2=0,25$.

BC საუღლე მოძრაობს გადატანით, ამიტომ $w_{B\tau}=w_{A\tau}=5$ მ/წმ^2. მეორე მხრივ $w_{B\tau}=dv_B/dt=0,5d\omega/dt=0,5\varepsilon$ $(\varepsilon=\varepsilon_{OB})$ => $5=0,5\varepsilon$ => $\varepsilon=10$ რად/წმ^2 => $\omega=\omega_0+\varepsilon t$, $\omega_0=0$ => $\omega=10t$ რად/წმ. ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (ა)-ში, მივიღებთ: $v_B=0,5\cdot 10t=$ $=5t$ მ/წმ. გამოვთვალოთ $w_{Bn}=v_B^2/OB=(5t)^2/0,5=50t^2$ მ/წმ^2, მაშინ $w_B=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}=$ $=\sqrt{5^2+(50t)^2}=5\sqrt{1+100t^4}$ მ/წმ^2.

პასუხი. $(x_A-0,5)^2+y_A^2=0,25$; $\omega_{OB}=10t$ რად/წმ; $\varepsilon=10$ რად/წმ^2; $v_B=5t$ მ/წმ; $w_B=5\sqrt{1+100t^4}$ მ/წმ^2.

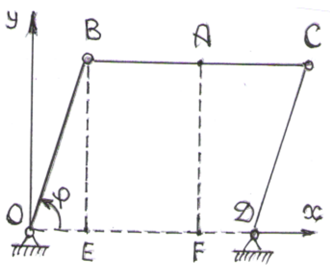
ამოცანა 9.7. AB წრფე მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 9.12). დროის რომელიღაც მომენტში A წერტილის $\vec{v}_A$ სიჩქარე AB წრფესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს და უდრის 18 მ/წმ. B წერტილის სიჩქარის მიმართულება ამ მომენტში AB წრფის მიმართულებას ემთხვევა. განსაზღვრეთ B წერტილის სიჩქარე.

ამოხსნა. გრასჰოფის თეორემის თანახმად,

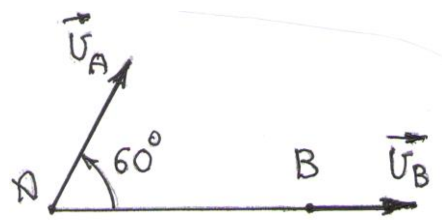
გეგმ$_{AB}(\vec{v}_A)=$გეგმ$_{AB}(\vec{v}_B)$ <=> $v_A\cos 60^\circ=v_B$ => $v_B=0,5\cdot 18=9$ მ/წმ.

პასუხი. 9 მ/წმ.

ამოცანა 9.8. (ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემა ერთი სხეულიდან მეორეზე ღვედის გამოყენებით). $O_1B=r_1$-რადიუსიანი ბორბალი 1 თანაბრად ბრუნვისას წუთში ასრულებს n ბრუნს (ნახ. 9.13). იგი უსასრულო ღვედით დაკავშირებულია $O_2C=r_2$-რადიუსიან ბორბალ 2-თან, რომელიც თავის მხრივ მკვიდრად არის დაკავშირებული $O_2A=r_3$-რადიუსიან ბორბალ 3-თან. განსაზღვრეთ ბორბალი 3-ის A წერტილის სიჩქარე და აჩქარება.



ნახ. 9.11



ნახ. 9.12

ამოხსნა. იგულისხმება, რომ ღვედი უჭიმარია, ამიტომ მის ყოველ წერტილს აქვს ერთნაირი სიჩქარე, ე.ი. $v_B=v_C$ <=> $\omega_1 r_1=\omega_2 r_2$, სადაც ω_1 და ω_2 1 და 2 ბორბლების კუთხური სიჩქარეებია. გვაქვს:

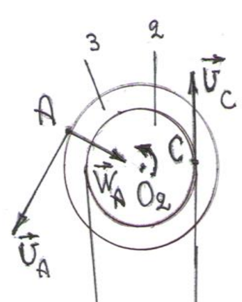
$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1} \quad => \quad \omega_2=\frac{r_1}{r_2}\omega_1 . \qquad (ა)$$

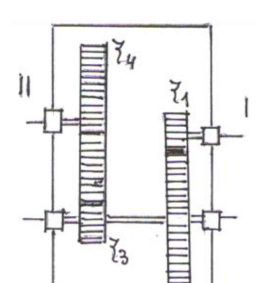
მივიღეთ: უსასრულო ღვედით შეერთებული ბორბლების კუთხური სიჩქარეები უკუპროპორციულია მათი რადიუსებისა.

როცა ბრუნვათა რიცხვი წუთში არის n, მაშინ კუთხური სიჩქარე $\omega=2\pi n$ რად/წთ=$\pi n/30$ რად/წმ. ჩვენ შემთხვევაში $\omega_1=2\pi n$ რად/წთ = $\pi n/30$ რად/წმ, ამიტომ $\omega_2=2\pi n\dfrac{r_1}{r_2}$ რად/წთ = $\dfrac{\pi n}{30}\dfrac{r_1}{r_2}$ რად/წმ.

ბორბალი 3 ბორბალ 2-თან მკვიდრად არის დაკავშირებული, ამიტომ $\omega_3=\omega_2$.

პირობის თანახმად, ბრუნვა თანაბარია, ამიტომ კუთხური სიჩქარე მუდმივია, მაშინ $v_A=\omega_2 r_3=2\pi n\dfrac{r_1}{r_2}r_3$ (წუთებში) $=\dfrac{\pi n}{30}\dfrac{r_1}{r_2}r_3$ (წამებში) და $w_A=\omega_2^2 r_3=4\pi^2 n^2\dfrac{r_1^2}{r_2^2}r_3$ (წუთებში) = $\dfrac{\pi^2 n^2}{900}\dfrac{r_1^2}{r_2^2}r_3$ (წამებში) ($w_{A\tau}=0$, $w_A=w_{An}$).





ნახ. 9.13 ნახ. 9.14

პასუხი. $v_A = \omega_2 r_3 = 2\pi n \dfrac{r_1}{r_2} r_3$ (წუთებში) $=$ $\dfrac{\pi n}{30}\dfrac{r_1}{r_2} r_3$ (წამებში); $w_A = \omega_2^2 r_3 =$ $= 4\pi^2 n^2 \dfrac{r_1^2}{r_2^2} r_3$ (წუთებში) $=$ $\dfrac{\pi^2 n^2}{900}\dfrac{r_1^2}{r_2^2} r_3$ (წამებში).

ამოცანა 9.9 . (ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემა ერთი სხეულიდან მეორეზე კბილანა თვლების საშუალებით). სიჩქარის რედუქტორი, რომლის დანიშნულებაა ერთი ლილვიდან მეორე ლილვზე ბრუნვის გადაცემისას შეცვალოს კუთხური სიჩქარის სიდიდე, შედგება ოთხი კბილანა თვალისაგან. ეს თვლები ბრუნავენ უძრავი ღერძების გარშემო. თვლებს აქვთ კბილანების შემდეგი ოდენობა: ζ_1=12, ξ_2=72, ξ_3=10. *II* ლილვი აკეთებს 100 ბრ/წთ, ხოლო *I* ლილვმა უნდა გააკეთოს 5400 ბრ/წთ (ნახ. 9.14). გაიგეთ მეოთხე თვალის კბილანების რიცხვი.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, *II* ლილვის ბრუნვითი მოძრაობა უნდა გადაეცეს *I* ლილვს. ამასთან დაკავშირებით, *II* ლილვს **წამყვანი** ეწოდება, ხოლო *I* ლილვს – **ამყოლი**.

იმისათვის, რომ ორი კბილანას მოდება განხორციელდეს, უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობა: $2\pi r_1/\zeta_1 = 2\pi r_2/\zeta_2$ => $r_1/r_2 = \zeta_1/\zeta_2$.

$h = \dfrac{2\pi r}{\zeta}$ სიდიდეს, რომელიც არის თვლის ფერსოს სიგრძის ფარდობა კბილანების რიცხვთან, **გადაცემის რიცხვი** ეწოდება.

თუ გავითვალისწინებთ წინა ამოცანაში მიღებულ $\omega_1/\omega_2 = r_2/r_1$ ტოლობას, გვექნება: ორი კბილანა თვლის მოდებისას, ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{D_2}{D_1}\,.$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში (იხ. ნახ. 9.14) $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}$ და $\dfrac{\omega_3}{\omega_4} = \dfrac{\zeta_4}{\zeta_3}$. მაგრამ 2 და 3 თვლები საერთო ღერძზე არიან მკვიდრად დამაგრებული, ამიტომ $\omega_2 = \omega_3$. მაშინ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\frac{\zeta_4}{\zeta_3} \quad => \quad \zeta_4 = \frac{\zeta_1\zeta_3}{\zeta_2}\frac{\omega_1}{\omega_4}\,.$$

ამოცანის პირობის თანახმად, $\omega_2 = \omega_4 = 2\pi \cdot 100 = 200\pi$ რად/წთ, $\omega_1 = 2\pi \cdot 5400 =$ 10800 რად/წთ და საბოლოოდ მივიღებთ: $\zeta_4 = \frac{12 \cdot 10}{72} \cdot \frac{10800}{200} = 90$.

პასუხი. 90.