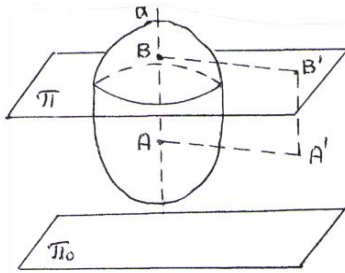


X თავი

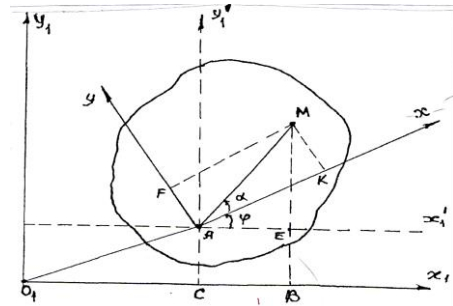
მყარი სხეულის ბრტყელპარალელური მოძრაობა

განსაზღვრა. მოძრაობას, რომლის დროსაც სხეულის ყველა წერტილი რაიმე უძრავი სიბრტყის მხოლოდ პარალელურ სიბრტყეებში მოძრაობს, ან რაც იგივეა, მანძილი სხეულის ნებისმიერი წერტილიდან რაიმე უძრავ სიბრტყემდე უცვლელი რჩება, **სხეულის ბრტყელპარალელური მოძრაობა** ეწოდება. ამ მოძრაობას, უფრო ხშირად, **ბრტყელ მოძრაობას** უწოდებენ.

აღვნიშნოთ უძრავი სიბრტყე π_0 -ით (ნახ. 10.1). სიბრტყეები, რომლებშიც მოძრაობენ სხეულის წერტილები, ცალ-ცალკე π_0 სიბრტყის პარალელურია, ამიტომ ისინი ერთმანეთის პარალელურებიც არიან. განვიხილოთ სხეულთან მკვიდრად დაკავშირებული და π_0 სიბრტყის მართობი a წრფე.



ნახ. 10.1



ნახ. 10.2

ვაჩვენოთ, რომ a წრფე მოძრაობს თავის თავის პარალელურად, ე.ი. ასრულებს გადატანით მოძრაობას (თვით სხეული კი, საზოგადოდ, არ მოძრაობს გადატანით). მართლაც, ვთქვათ, a წრფის AB მონაკვეთმა დროის Δt შუალედში დაიკავა $A'B'$ მდებარეობა. $ABB'A'$ ოთხკუთხედში $AB = A'B'$ (სხეული აბსოლუტურად მყარია!) და $AA' \parallel BB'$ (წერტილები მოძრაობენ π_0 სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში), ამიტომ $ABB'A'$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, საიდანაც $AB \parallel A'B'$.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ საკმარისია შევისწავლოთ a წრფის მხოლოდ ერთი წერტილის მოძრაობა. ჩავატაროთ ანალოგიური მსჯელობა π_0 სიბრტყის მართობი და სხეულთან მკვიდრად დაკავშირებული სხვა წრფეების მიმართაც და დავასკვნით: მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის შესასწავლად საკმარისია შევისწავლოთ ამ სხეულის იმ წერტილების მოძრაობა, რომლებიც მდებარეობს π_0 სიბრტყის რომელიმე პარალელურ სიბრტყეში, ე.ი. იმ წერტილების მოძრაობა, რომლებიც მდებარეობს π სიბრტყის სხეულთან კვეთაში და ქმნის ბრტყელ ფიგურას.

სიბრტყეს, რომელშიც ფიგურა მდებარეობს, ამ **ფიგურის საკუთარი სიბრტყე** ეწოდება. როგორც ვხედავთ, ბრტყელი მოძრაობის დროს სხეულის სივრცითი მოძ-

რაობის შესწავლა დაიყვანება საკუთარ სიბრტყეში ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის შესწავლაზე.

10.1. მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები. თავისუფლების ხარისხი

ვიხილავთ ბრტყელი ფიგურის მოძრაობას საკუთარ სიბრტყეში უძრავ $O_1x_1y_1$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. გამოვიყენოთ ფორმულები, რომელთა საშუალებით შეგვეძლება დროის ნებისმიერ მომენტში ფიგურის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატების გაგება. ნახ. 10.2-დან გვაქვს:

$$x_1 = O_1B, \quad y_1 = MB. \quad (10.1.1)$$

ბრტყელ ფიგურასთან მკვიდრად დავაკავშიროთ Axy კოორდინატთა სისტემა, რომელიც, ცხადია, იმოძრაებს ფიგურასთან ერთად. A წერტილის კოორდინატები $O_1x_1y_1$ სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ x_A, y_A -თი, მაშინ

$$x_1 = O_1C + CB = x_A + CB, \quad y_1 = BE + EM = y_A + EM. \quad (10.1.2)$$

O_1x_1 და O_1y_1 ღერძების პარალელურად გავატაროთ შესაბამისად Ax'_1 და Ay'_1 ღერძები. კუთხე Ax'_1 და Ax ღერძებს შორის აღვნიშნოთ φ -თი, ხოლო კუთხე Ax ღერძსა და AM მონაკვეთს შორის - α -თი. მაშინ AM მონაკვეთის მიერ Ax'_1 , ან რაც იგივეა, O_1x_1 ღერძთან შედგენილი კუთხე უდრის $\varphi + \alpha$ -ს. M წერტილიდან Ax და Ay ღერძებზე დავუშვათ MK და MF მართობები. $\square AME$ -დან

$$AE = AM \cos(\varphi + \alpha), \quad ME = AM \sin(\varphi + \alpha). \quad (10.1.3)$$

მაგრამ $CB = AE$, ამიტომ (10.1.2) და (10.1.3) ასეთ სახეს მიიღებენ: $\Rightarrow$

$$x_1 = x_A + AM \cos(\varphi + \alpha), \quad y_1 = y_A + AM \sin(\varphi + \alpha) \quad \Rightarrow \quad (10.1.4)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_A + AM \cos \varphi \cos \alpha - AM \sin \varphi \sin \alpha, \\ y_1 &= y_A + AM \sin \varphi \cos \alpha + AM \cos \varphi \sin \alpha. \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

$\square AMK$ -ში $AM \cos \alpha = AE = x$ და $AM \sin \alpha = MK = y$, სადაც x და y არის M წერტილის კოორდინატები Axy სისტემაში. ამ შედეგების გათვალისწინებით (10.1.5) ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_A + x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y_1 &= y_A + x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

(10.1.6) არის ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები $O_1x_1y_1$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

(10.1.6) ფორმულიდან გამომდინარეობს: თუ ცნობილია x_A, y_A, x, y და φ სიდიდეები, მაშინ ცნობილია ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა დროის ნებისმიერ მომენტში $O_1x_1y_1$ სისტემის მიმართ. ამათგან x და y შეგვიძლია ჩავთვალოთ ცნობილ სიდიდეებად, ვინაიდან ისინი M წერტილის კოორდინატებია ბრტყელ ფიგურასთან მკვიდრად დაკავშირებულ Axy კოორდინატთა სისტემის

მიმართ და მათი გაგება შეგვიძლია უშუალო გაზომვით. ცხადია, M წერტილისათვის x და y მუდმივი სიდიდეებია.

მივიღეთ: ბრტყელი ფიგურის ერთი ნებისმიერი წერტილის, მაგალითად, A წერტილის კოორდინატები (x_A, y_A) და მის გარშემო ფიგურის მობრუნების კუთხე φ სავსებით განსაზღვრავს ფიგურის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობას საკუთარ სიბრტყეში დროის ნებისმიერ მომენტში.

ვთქვათ, მოცემულია

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (10.1.7)$$

(10.1.7) განტოლებებს **მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები** ეწოდება. ეს განტოლებები ბრტყელი ფიგურის საკუთარ სიბრტყეში მოძრაობის განტოლებებიცაა. ცხადია, x_A , y_A და φ ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი სიდიდეებია.

განსაზღვრა. იმ დამოუკიდებელი პარამეტრების რიცხვს, რომელთა საშუალებით დროის ნებისმიერ მომენტში ცალსახად შეგვიძლია გავიგოთ მოძრავი სხეულის (წერტილის) მდებარეობა არჩეულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, სხეულის (წერტილის) **მოძრაობის თავისუფლების ხარისხი** ეწოდება.

განსაზღვრის თანახმად, მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის (ასევე ბრტყელი ფიგურის საკუთარ სიბრტყეში მოძრაობის) თავისუფლების ხარისხი არის სამი.

შენიშვნა 1. ბრტყელი ფიგურის საკუთარ სიბრტყეში მოძრაობის შესწავლისას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს ფიგურის ფორმასა და ზომას.

2. ბრტყელ ფიგურასთან მკვიდრად დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემის სათავედ (ჩვენ შემთხვევაში A წერტილი (ნახ. 10.1)) შეგვიძლია ავიღოთ ფიგურის ნებისმიერი წერტილი.

განსაზღვრა. ბრტყელ ფიგურასთან მკვიდრად დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემის სათავეს **პოლუსი** ეწოდება.

შენიშვნა 2. თუ ცნობილია სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები, ე.ი. (10.1.7) განტოლებები, მაშინ (10.1.6) ფორმულებით შეგვიძლია გავიგოთ ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა.

10.2. ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის დაშლა გადანატიით და ბრუნვით მოძრაობებად

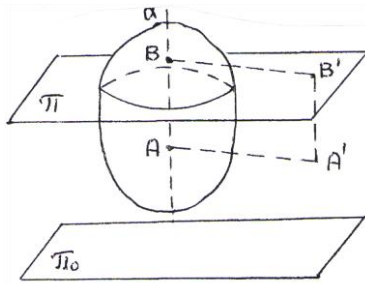
ვიხილათ ბრტყელი ფიგურის მოძრაობას π სიბრტყეში უძრავი Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ (ნახ. 10.3). პოლუსად შევარჩიოთ ფიგურის ნებისმიერი A წერტილი. შევისწავლოთ ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის მოძრაობა. M და A წერტილების რადიუს-ვექტორები O სათავეს მიმართ აღვნიშნოთ $\vec{r}_M$ და $\vec{r}$ ვექტორებით. ნახ. 10.3-დან უშუალოდ მივიღებთ:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}, \quad (10.2.1)$$

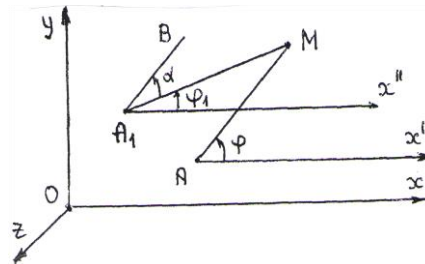
სადაც $\vec{r}$ არის M წერტილის რადიუს-ვექტორი A პოლუსის მიმართ. A პოლუსზე გავატაროთ Ax' და Ay' ღერძები შესაბამისად Ox და Oy ღერძების პარალელურად. კუთხე Ax' და $\vec{r}$ ვექტორს შორის აღვნიშნოთ φ ასოთი.

დამტკიცოთ შემდეგი თეორემა (შალის თეორემა): ბრტყელი ფიგურის ყოველი გადაადგილება საკუთარ სიბრტყეში შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც რაიმე პოლუსთან ერთად გადატანით და ამ პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\varphi = \text{const}$, მაშინ $\vec{r}$ გახდება მუდმივი ვექტორი (ის აერთებს აბსოლუტურად მყარი სხეულის ორ წერტილს, ამიტომ $|\vec{r}| = \text{const}$), რის გამოც $\overline{AM} = \vec{r}$ ვექტორი თავის თავის პარალელურად გადაადგილდება. მაგრამ M და A წერტილები ნებისმიერად არჩეული წერტილებია, ამიტომ ბრტყელი ფიგურის საკუთარ სიბრტყეში მოძრაობისას მასში ნებისმიერად აღებული წრფის მონაკვეთი გადაადგილდება თავის თავის პარალელურად, ე.ი. ბრტყელი ფიგურა ასრულებს გადატანით მოძრაობას.



ნახ. 10.3



ნახ. 10.4

ახლა დავუშვათ, რომ $\vec{r} = \overline{consr}$. ამ შემთხვევაში A პოლუსი არის უძრავი. ვინაიდან $|\vec{r}| = \text{const}$, ამიტომ ბრტყელი ფიგურის M წერტილი მოძრაობს წრეწირზე A პოლუსის გარშემო. რადგანაც M წერტილი შერჩეულია ნებისმიერად, ამიტომ საბოლოოდ ვღებულობთ: ბრტყელი ფიგურის საკუთარ სიბრტყეში მოძრაობისას ყოველი წერტილი მოძრაობს წრეწირზე A პოლუსის გარშემო. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ბრტყელი ფიგურა A პოლუსის გარშემო ბრუნავს. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

აღსანიშნავია, რომ ბრტყელი მოძრაობის შემადგენელ მოძრაობებად დაშლისას, არა აქვს მნიშვნელობა მათ თანმიმდევრობას: შეგვიძლია ფიგურა ჯერ გადავიტანოთ და მერე მოვაბრუნოთ პოლუსის გარშემო და პირიქით, ჯერ მოვაბრუნოთ და მერე გადავიტანოთ.

10.3. გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების დამოკიდებულება პოლუსის არჩევაზე. კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება ბრტყელი მოძრაობის დროს

წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ პოლუსად შეგვიძლია ავირჩიოთ ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილი. ახლა გავარკვიოთ, როგორ არის დამოკიდებული

პოლუსის არჩევაზე ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის შემადგენელი - გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობები?

განვიხილოთ ბრტყელი ფიგურის მოძრაობა საკუთარ სიბრტყეში Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ (ნახ. 10.4). ვთქვათ, M ფიგურის ნებისმიერი წერტილია და პოლუსად არჩეული გვაქვს A წერტილი. ავირჩიოთ ახალ პოლუსად ფიგურის ნებისმიერი A_1 წერტილი. საზოგადოდ, $v_A \neq v_{A_1}$ და $W_A \neq W_{A_1}$; წინააღმდეგ შემთხვევაში ფიგურის ორ ნებისმიერად არჩეულ წერტილს ექნებოდათ ერთნაირი სიჩქარე და ერთნაირი აჩქარება, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოძრაობა იქნებოდა გადატანითი.

მივიღეთ: ბრტყელი ფიგურის გადატანითი მოძრაობა დამოკიდებულია პოლუსის არჩევაზე.

ახლა განვიხილოთ ფიგურის ბრუნვითი მოძრაობა. A წერტილზე გავატაროთ Ox ღერძის პარალელური Ax' ღერძი, ხოლო A წერტილზე - Ax'' ღერძი. ასევე გავატაროთ AM წრფის პარალელური A_1B წრფე. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\angle MAx = \varphi$ $\angle MAx'' = \varphi_1$, $\angle BA_1M = \alpha$ ცხადია, რომ

$$\varphi_1 = \varphi - \alpha. \quad (10.3.1)$$

$\angle BA_1M = \alpha$ მუდმივია, ვინაიდან მისი გვერდები აბსოლუტურად მყარი სხეულის წერტილებს აერთებს. გავაწარმოთ (10.3.1) ტოლობა, მივიღებთ:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \Leftrightarrow \omega_1 = \omega \Rightarrow \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad (10.3.1)$$

A და A_1 პოლუსები ნებისმიერადაა შერჩეული, ამიტომ ყოველი პოლუსის მიმართ ბრტყელი ფიგურა ბრუნავს ერთნაირი კუთხური სიჩქარითა და ერთნაირი კუთხური აჩქარებით.

მივიღეთ: პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობა არ არის დამოკიდებული პოლუსის არჩევაზე.

შევვხვით ვექტორულ კუთხურ სიჩქარესა და ვექტორულ კუთხურ აჩქარებას. ვინაიდან მოძრაობა ხდება ერთ სიბრტყეში, ამიტომ $\vec{\omega}$ ვექტორი მიმართულია პოლუსზე გამავალი და ფიგურის საკუთარი სიბრტყისადმი მართობი ღერძის გასწვრივ ისე, რომ მისი ისრის ბოლოდან ფიგურის ბრუნვა უნდა ჩანდეს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით. $\vec{\varepsilon}$ ვექტორული კუთხური აჩქარების მიმართულება ემთხვევა $\vec{\omega}$ ვექტორის მიმართულებას, როცა ბრუნვა აჩქარებულია, ხოლო თუ ბრუნვა შენელებულია - მის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. ვინაიდან $\vec{\omega}$ და $\vec{\varepsilon}$ ვექტორები არ არიან დამოკიდებული პოლუსის არჩევაზე, ამიტომ ისინი შეგვიძლია მოვდოთ ფიგურის ნებისმიერ წერტილში, ე.ი. $\vec{\omega}$ და $\vec{\varepsilon}$ **თავისუფალი ვექტორებია.**

იმ შემთხვევაში, როცა სხეულის ბრტყელი მოძრაობა შეისწავლება ისეთი $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომლის Oxy სიბრტყე ემთხვევა ფიგურის სიბრტყეს, მაშინ

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega, \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = \varepsilon, \quad (10.3.2)$$

სადაც $\omega = \pm|\vec{\omega}|$, $\varepsilon = \pm|\vec{\varepsilon}|$.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{\omega}$ და $\vec{\varepsilon}$ ვექტორები ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ: $\vec{\omega}(0,0,\omega)$, $\vec{\varepsilon}(0,0,\varepsilon)$.

10.4. ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარის განსაზღვრა

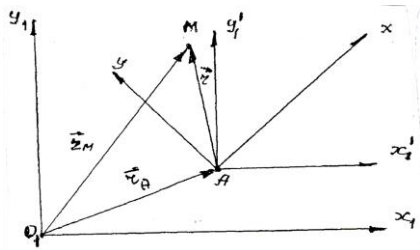
ვიხილავთ ბრტყელი ფიგურის მოძრაობას საკუთარ სიბრტყეში, რომელიც ემთხვევა უძრავ $O_1x_1y_1z_1$ კოორდინატთა სისტემის $O_1x_1y_1$ სიბრტყეს (ნახ. 10.5). გამოვიყვანოთ ფიგურის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის განმსაზღვრელი ფორმულა.

ნახ. 10.5-დან ვღებულობთ:

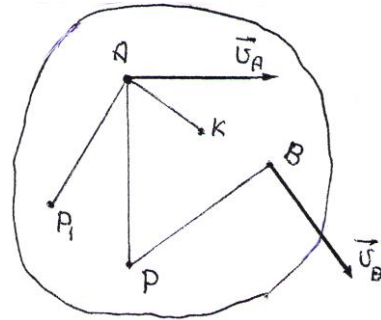
$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}, \quad (10.4.1)$$

სადაც $|\vec{r}| = \text{const}$. გავაწარმოთ ეს ტოლობა დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (10.4.2)$$



ნახ. 10.5



ნახ. 10.6

$\frac{d\vec{r}_M}{dt}$ არის M წერტილის სიჩქარე $O_1x_1y_1$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. აღვნიშნოთ იგი $\vec{v}_M$ -ით. $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$ არის A წერტილის სიჩქარე იმავე კოორდინატთა სისტემის მიმართ. აღვნიშნოთ იგი $\vec{v}_A$ -თი. $\frac{d\vec{r}}{dt}$ წარმოადგენს M წერტილის სიჩქარეს ბრტყელი ფიგურის A პოლუსის გარშემო ბრუნვის დროს (ვინაიდან $|\vec{r}| = \text{const}$), რის გამოც M წერტილი მოძრაობს A ცენტრის მქონე წრეწირზე. აღვნიშნოთ იგი $\vec{v}_{MA} = \vec{v}^{\text{ბრ}}$ -თი. მაშინ (10.4.2) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} = \vec{v}_A + \vec{v}^{\text{ბრ}}. \quad (10.4.3)$$

ცხადია, რომ

$$\vec{v}_{MA} \perp \vec{MA}, \quad v_{MA} = \omega \cdot MA, \quad (10.4.4)$$

სადაც ω ფიგურის კუთხური სიჩქარეა.

(10.4.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს: ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე გეომეტრიული ჯამია პოლუსის სიჩქარის და წერტილის იმ სიჩქარისა, რომელიც მას აქვს პოლუსის გარშემო ფიგურის ბრუნვისას.

როგორც ვიცით, წერტილის ბრუნვითი სიჩქარე გამოითვლება ეილერის ფორმულით (იხ. §9.6), ამიტომ

$$\vec{v}_{MA} = \vec{v}^{\text{ბრ}} = \vec{\omega} \times \overline{AM}, \quad (10.4.5)$$

სადაც $\vec{\omega}$ ფიგურის ვექტორული კუთხური სიჩქარეა. (10.4.3) და (10.4.5) ფორმულები გვაძლევს:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AM}. \quad (10.4.6)$$

ბრტყელ ფიგურასთან მკვიდრად დავაკავშიროთ Axy კოორდინატთა სისტემა. ვექტორის გეგმილები უძრავ ღერძებზე აღვნიშნოთ v_{Mx_1}, v_{My_1} -ით, ხოლო მოძრავ ღერძებზე - v_{Mx}, v_{My} -ით. ანალოგიურად აღვნიშნოთ $\vec{v}_A$ ვექტორის გეგმილებიც: v_{Ax_1}, v_{Ay_1} და v_{Ax}, v_{Ay} -ით. ადვილად მივიღებთ, რომ უძრავ კოორდინატთა სისტემაში $\overline{AM}$ ვექტორის გეგმილებია $x_{1M} - x_A, y_{1M} - y_A$, ხოლო მოძრავ სისტემაში - x_M, y_M . $\vec{\omega}$ ვექტორის გეგმილებია $0, 0, \omega$. მათემატიკაში ცნობილი ვექტორული ნამრავლის ჩაწერა ჩვენი შემთხვევისთვის გვაძლევს:

$$\vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \overline{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_{1M} - x_A & y_{1M} - y_A & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}_1(y_{1M} - y_A) \cdot \omega + \vec{j}_1(x_{1M} - x_A) \cdot \omega, \quad (10.4.7)$$

სადაც $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ უძრავი ღერძების ორტეზია.

ანალოგიურად მივიღებთ მოძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართაც:

$$\vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \overline{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_M & y_M & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot y_M \cdot \omega + \vec{j} \cdot x_M \cdot \omega, \quad (10.4.8)$$

სადაც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ მოძრავი ღერძების ორტეზია.

(10.4.7) და (10.4.8) გამოსახულებების გათვალისწინებით (10.4.6) დავაგეგმილოთ უძრავ და მოძრავ ღერძებზე. შესაბამისად მივიღებთ:

$$v_{Mx_1} = v_{Ax_1} - (y_{1M} - y_A) \cdot \omega, \quad v_{My_1} = v_{Ay_1} + (x_{1M} - x_A) \cdot \omega, \quad (10.4.9)$$

$$v_{Mx} = v_{Ax} - y_M \cdot \omega, \quad v_{My} = v_{Ay} + x_M \cdot \omega. \quad (10.4.10)$$

თუ გავიგებთ v_{Mx_1} და v_{My_1} გეგმილებს, მაშინ

$$v_M = \sqrt{v_{Mx_1}^2 + v_{My_1}^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{v_{My_1}}{v_{Mx_1}}, \quad (10.4.11)$$

სადაც α არის $\vec{v}_M$ ვექტორის მიერ Ox_1 ღერძთან შედგენილი კუთხე.

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2}, \quad \alpha' = \arctg \frac{v_{My}}{v_{Mx}}, \quad (10.4.12)$$

სადაც α' არის $\vec{v}_M$ ვექტორის მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხე.

საზოგადოდ, ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეების განსაზღვრა ზემოთ მოყვანილი ფორმულებით საკმაოდ რთულ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული, ამიტომ სასურველია ვექტორით უფრო მარტივი მეთოდები. ერთ-ერთ ასეთ მეთოდს განვიხილავთ მომდევნო პარაგრაფში.

10.5. სიჩქარეთა მყისი ცენტრი

გავეცნოთ ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეების გამოთვლის მეორე მეთოდს, რომელიც დაფუძნებულია სიჩქარეთა მყისი ცენტრის ცნებაზე.

განსაზღვრა. ბრტყელი ფიგურის იმ წერტილს, რომლის სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში ნულის ტოლია, **სიჩქარეთა მყისი ცენტრი** ეწოდება.

თეორემა. თუ ბრტყელი ფიგურის მოძრაობა საკუთარ სიბრტყეში არაგადატანითია, მაშინ დროის ყოველ მომენტში არსებობს სიჩქარეთა მყისი ცენტრი და მასთან, მხოლოდ ერთი.

დამტკიცება. დაუშვათ, რომ დროის მოცემულ მომენტში ბრტყელი ფიგურის ორი ნებისმიერი A და B წერტილის $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$ სიჩქარეები არ არის ერთმანეთის პარალელური (ამით ფიგურის გადატანით მოძრაობა გამოირიცხა). ადვილად A და B წერტილებიდან სიჩქარეებისადმი მართობები და მათი გადაკვეთის წერტილი ადვილად P ასოთი (ნახ. 10.6). დავამტკიცოთ, რომ $v_P = 0$. დაუშვათ საწინააღმდეგო: $v_P \neq 0$. მაშინ გრასჰოფის თეორემის თანახმად

$$\begin{aligned} \text{გვმ}_{AP}(\vec{v}_P) &= \text{გვმ}_{AP}(\vec{v}_A), & \text{გვმ}_{BP}(\vec{v}_P) &= \text{გვმ}_{BP}(\vec{v}_B) \Rightarrow \\ \text{გვმ}_{AP}(\vec{v}_P) &= 0, & \text{გვმ}_{BP}(\vec{v}_P) &= 0 \Rightarrow \vec{v}_P \perp \overline{AP} \quad \text{და} \quad \vec{v}_P \perp \overline{BP}. \end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ $\vec{v}_P$ ვექტორი ერთდროულად მართობია ორი ურთიერთგადაკვეთი წრფისა, რაც შეუძლებელია, ამიტომ $v_P = 0$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ P წერტილი ერთადერთი მყისი ცენტრია. დაუშვათ საწინააღმდეგო: არსებობს ფიგურის კიდევ ერთი P_1 წერტილი, რომლის სიჩქარე $v_{P_1} = 0$ დროის მოცემულ მომენტში. მაშინ გვაქვს: $\text{გვმ}_{AP_1}(\vec{v}_A) = 0$ და $\text{გვმ}_{AP_1}(\vec{v}_{P_1}) = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს: ან $v_A = 0$ ან $\vec{v}_A \perp \overline{AP_1}$. მაგრამ სინამდვილეში არც ერთს არა აქვს ადგილი, ამიტომ $v_{P_1} \neq 0$. ამგვარად, დროის მოცემულ მომენტში მხოლოდ P წერტილის სიჩქარეა ნულის ტოლი. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა (ბერნული-შალის): ბრტყელი ფიგურის საკუთარ სიბრტყეში მოძრაობისას დროის ყოველ მომენტში ფიგურის წერტილების სიჩქარეები ისეა განაწილებული, თითქოს ადგილი აქვს მხოლოდ ბრუნვას სიჩქარეთა მყისი ცენტრის გარშემო.

დამტკიცება. ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი A წერტილის $\vec{v}_A$ სიჩქარის გამო-
სათვლელად გამოვიყენოთ (10.4.6) ფორმულა და მივიღებთ (ნახ. 10.6):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_K + \vec{\omega} \times \overrightarrow{KA}, \quad (10.5.1)$$

სადაც K პოლუსია. ახალ პოლუსად ავირჩიოთ P სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. მაშინ
(10.4.6) ფორმულის თანახმად

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA}. \quad (10.5.2)$$

დროის მოცემულ მომენტში $\vec{v}_P = 0$, ამიტომ (10.5.2) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA}. \quad (10.5.3)$$

A წერტილი ნებისმიერადაა შერჩეული, ამიტომ თეორემა დამტკიცებულია.

(10.5.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს ($\vec{v}_A \perp PA$, $\vec{v}_B \perp PB, \dots$), რომ

$$v_A = \omega \cdot PA, \quad v_B = \omega \cdot PB \quad \text{და ა.შ.} \quad \Rightarrow \quad (10.5.4)$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB} \Leftrightarrow \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}. \quad (10.5.5)$$

მივიღეთ: ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეები პროპორციულია სიჩქა-
რეთა მყისი ცენტრიდან წერტილების მანძილებისა.

ზემოთ მიღებული შედეგებიდან შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. თუ ვიცით ბრტყელი ფიგურის ორი წერტილის სიჩქარეების მიმართულებე-
ბი, მაშინ ამ წერტილებიდან შესაბამისი სიჩქარეებისადმი აღმართული მართობების
გადაკვეთის წერტილი იქნება სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

2. თუ ვიცით ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი A წერტილის $\vec{v}_A$ სიჩქარე, ხო-
ლო მეორე B წერტილის სიჩქარის მხოლოდ მიმართულება, ვიპოვოთ რა P სიჩ-
ქარეთა მყის ცენტრს, შემდეგ (10.5.5) ფორმულით გავიგებთ B წერტილის სიჩქარის
მოდულს.

3. (10.5.4) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}. \quad (10.5.6)$$

ω -ს გასაგებად გამოვიყენოთ (10.5.6)-სგან განსხვავებული ფორმულა. (10.4.3)
და (10.4.4) ტოლობებიდან გამომდინარეობს: თუ B და C ბრტყელი ფიგურის წერტი-
ლებია, მაშინ $\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$ და $v_{BC} = \omega \cdot BC \Rightarrow v_{BC} = |\vec{v}_{BC}| = |\vec{v}_B - \vec{v}_C|$ და $v_{BC} = \omega \cdot BC \Rightarrow$
 $\omega \cdot BC = |\vec{v}_B - \vec{v}_C| \Rightarrow$

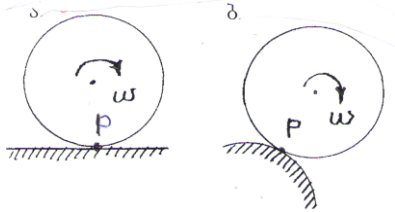
$$\omega = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_C|}{BC} = \frac{|\vec{v}_B + (-\vec{v}_C)|}{BC}. \quad (10.5.7)$$

როცა C წერტილი ემთხვევა სიჩქარეთა მყის ცენტრს, მაშინ $v_C = 0$ და (10.5.7) -დან
მივიღებთ: $\omega = v_B/BC$, ე.ი. (10.5.7) ფორმულა გადავიდა (10.5.6) ფორმულაში.

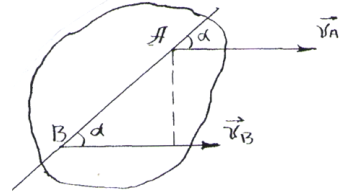
10.6. სიჩქარეთა მყისი ცენტრის განსაზღვრის

ზოგიერთი კერძო შემთხვევა

ბრტყელი ფიგურის სიჩქარეთა მყისი ცენტრის მოსაძიებლად წინა პარაგრაფში გავეცანით მარტივ მეთოდს, რომელიც დაფუძნებულია ორი ნებისმიერი წერტილის სიჩქარეების მიმართულების ცოდნაზე. გავეცნოთ ზოგიერთ სხვა შემთხვევასაც.



ნახ.10.7



ნახ. 10.8

1. ვთქვათ, თვალი სრიალის გარეშე მიგორავს უძრავ ზედაპირზე (ნახ. 10.7). ზედაპირთან საერთო შეხების წერტილის სიჩქარე დროის ყოველ მომენტში ნულის ტოლია, ამიტომ უძრავ ზედაპირთან შეხების წერტილი არის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

2. ვთქვათ, დროის მოცემულ მომენტში ფიგურის ორი ნებისმიერი A და B წერტილის $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$ სიჩქარეები ერთმანეთის პარალელურია და არ არიან მართობი AB წრფისა (ნახ. 10.8). გრასჰოფის თეორემის თანახმად,

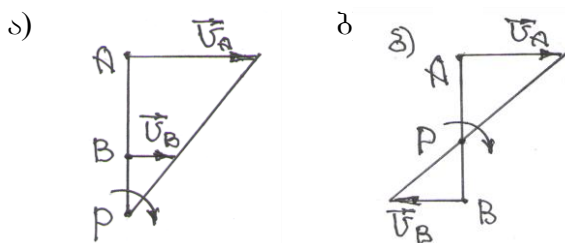
$$\text{გეგმ}_{AB}(\vec{v}_A) = \text{გეგმ}_{AB}(\vec{v}_B) \Leftrightarrow v_A \cos \alpha = v_B \cos \alpha \Rightarrow v_A = v_B.$$

ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ ფიგურის ყველა წერტილისთვის. ამგვარად, ფიგურის ყველა წერტილს დროის ყოველ მომენტში აქვს ერთნაირი სიჩქარე (და ერთნაირი აჩქარება), ე.ი. თითქოს ადგილი აქვს გადატანით მოძრაობას. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ადგილი აქვს ფიგურის მყის-გადატანით მოძრაობას.

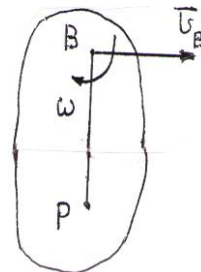
(10.6.7) ფორმულის თანახმად,

$$\omega = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_C|}{BC} = \frac{0}{BC} = 0.$$

თუ სიჩქარეთა მყის ცენტრს აღვნიშნავთ P ასოთი, მაშინ $PB = v_B / 0 = \infty$, ე.ი. ამ შემთხვევაში სიჩქარეთა მყისი ცენტრი უსასრულობაში მდებარეობს.



ნახ. 10.9



ნახ. 10.10

3. ვთქვათ, დროის მოცემულ მომენტში ფიგურის ორი ნებისმიერი A და B წერტილის $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$ სიჩქარეები არიან ერთმანეთის პარალელური და AB წრფის მართობები (ნახ. 10.9, ა და ბ). ამ შემთხვევაში სიჩქარეთა მყისი ცენტრი არსებობს და იგი ასე მოიძებნება: $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$ სიჩქარეების ვექტორების ბოლოებზე გაავატარებთ წრფეს AB წრფის გადკვეთამდე და ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი იქნება სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, რაშიც გვარწმუნებს (10.5.6) ტოლობა. თუ განხილულ შემთხვევაში $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}$, მაშინ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი უსასრულოებაში მდებარეობს.

4. ვთქვათ, ვიცით ბრტყელი ფიგურის ω კუთხური სიჩქარე და მისივე ნებისმიერი B წერტილის $\vec{v}_B$ სიჩქარე (ნახ. 10.10). ვიცით, რომ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს B წერტილიდან $\vec{v}_B$ ვექტორის მართობულად აღმართულ წრფეზე და თუ მას აღვნიშნავთ P ასოთი, გვექნება:

$$PB = v_B / \omega. \quad (10.6.1)$$

10.7. ბრტყელი ფიგურის წერტილების აჩქარების განსაზღვრა

ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარის გასაგებად §10.4-ში გამოვიყვანეთ შემდეგი ფორმულა:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} = \vec{v}_A + \vec{v}^{\text{ბრ}}, \quad (10.7.1)$$

სადაც $\vec{v}_A$ არის A პოლუსის სიჩქარე, ხოლო $\vec{v}_{MA} = \vec{v}^{\text{ბრ}}$ არის M წერტილის ის სიჩქარე, რომელიც მას აქვს პოლუსის გარშემო ფიგურის ბრუნვის დროს.

(10.7.1) გავაწარმოთ დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{MA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}^{\text{ბრ}}}{dt}. \quad (10.7.2)$$

$$\text{აჩქარების განსაზღვრის თანახმად, } \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{w}_M, \quad \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{w}_A, \quad \frac{d\vec{v}_{MA}}{dt} = \vec{w}_{MA} = \frac{d\vec{v}^{\text{ბრ}}}{dt} = \vec{w}^{\text{ბრ}}$$

და (10.7.2) ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA} = \vec{w}_A + \vec{w}^{\text{ბრ}}, \quad (10.7.3)$$

მივიღეთ: ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება გეომეტრიული ჯამია პოლუსის აჩქარების და წერტილის იმ აჩქარებისა, რომელიც მას აქვს პოლუსის გარშემო ფიგურის ბრუნვის დროს.

$\vec{w}_M$ აჩქარების მოდული და მიმართულება გამოითვლება $\vec{w}_A$ და $\vec{w}_{MA}$ ვექტორებზე, როგორც გვერდებზე, პარალელოგრამის აგებით (ნახ. 10.11). მაგრამ აჩქარების გაგების ეს გზა მოითხოვს საკმაოდ რთულ გამოთვლებს, ამიტომ უფრო ხელსაყრელია $\vec{w}_{MA}$ აჩქარების დაშლა $\vec{w}_{MA}^r$ მხეხ და $\vec{w}_{MA}^n$ შემდგენებად (ნახ. 10.12). მაშინ (10.7.3) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA}^r + \vec{w}_{MA}^n. \quad (10.7.4)$$

$\vec{w}_{MA}^n$ ვექტორი ყოველთვის მიმართულია MA -ს გასწვრივ M -დან A წერტილისაკენ. $\vec{w}_{MA}^r$ ვექტორი მიმართულია AM მონაკვეთის მართობულად ბრუნვის მხარეს,

თუ ბრუნვა აჩქარებულია (ნახ. 12,ა), და ბრუნვის საწინააღმდეგოდ – თუ ბრუნვა შენელებულია (ნახ. 12,ბ). ცხადია,

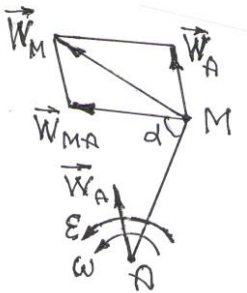
$$w_{MA}^r = w_r^{\partial r} = \varepsilon \cdot AM, \quad w_{MA}^n = w_n^{\partial r} = \omega^2 \cdot AM \quad \Rightarrow$$

$$w_{MA} = AM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \varepsilon / \omega^2, \quad (10.7.5)$$

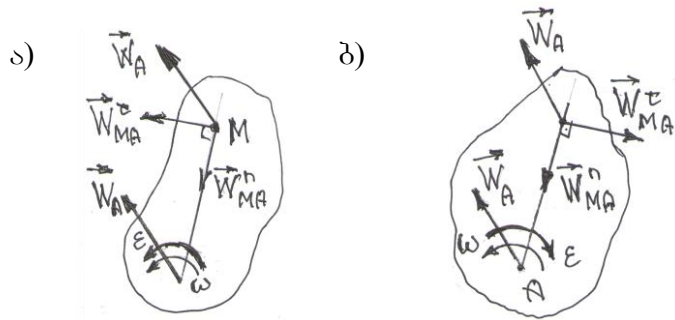
სადაც ω და ε ფიგურის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარებაა, ხოლო α კუთხეა $\vec{w}_{MA}$ ვექტორსა და AM მონაკვეთს შორის.

თუ A პოლუსის მოძრაობა მრუდწირულია, მაშინ $\vec{w}_A$ აჩქარებას დავშლით $\vec{w}_A^r$ და $\vec{w}_A^n$ შემდგენებად და (10.7.4) ასე გადაიწერება:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A^r + \vec{w}_A^n + \vec{w}_{MA}^r + \vec{w}_{MA}^n. \quad (10.7.6)$$



ნახ. 10.11



ნახ. 10.12

თუ M წერტილის მოძრაობა მრუდწირულია და ვიცით ტრაექტორია, მაშინ $\vec{w}_M$ აჩქარებას დავშლით $\vec{w}_r$ და $\vec{w}_M^n$ შემდგენებად და ყველაზე ზოგადი შემთხვევისათვის გვქვია:

$$\vec{w}_M^r + \vec{w}_M^n = \vec{w}_A^r + \vec{w}_A^n + \vec{w}_{MA}^r + \vec{w}_{MA}^n \quad (10.7.7)$$

10.8. ბრტყელი მოძრაობის ძირითადი კინემატიკური მახასიათებლები.

ზოგადი მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

მყარი სხეულის ბრტყელპარალელურ მოძრაობის შესწავლისას მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ვიცით პოლუსის სიჩქარე და აჩქარება (A პოლუსის შემთხვევაში $\vec{v}_A$ და $\vec{w}_A$), პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის ω კუთხური სიჩქარე და ε კუთხური აჩქარება, მაშინ შეგვიძლია გამოვთვალოთ სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება. ამგვარად, ჩამოთვლილი ოთხი სიდიდე სხეულის ბრტყელი მოძრაობის ძირითადი კინემატიკური მახასიათებლებია. რასაკვირველია, ამოცანის ამოსხნა უნდა დავიწყოთ ამ სიდიდეების განსაზღვრით.

მოგვყავს ზოგიერთი ზოგადი მოსაზრება ამოცანების ამოსხნასთან დაკავშირებით. მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის დროს სხეულის კუთხური სიჩქარის ან მისი წერტილების სიჩქარის გასაგებად უნდა ვიცოდეთ სხეულის კვეთის ერთი ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და მეორე წერტილის სიჩქარის მიმართულება (გამონაკლისს წარმოადგენს §10.6-ში განხილული პირველი და მეორე შემთხვევები). შესას-

წავლი მექანიზმი უნდა გამოვსახოთ ნახაზზე იმ მდებარეობაში, რომლისთვისაც მოითხოვება მახასიათებლების განსაზღვრა. გამოთვლების დროს უნდა გვახსოვდეს, რომ სიჩქარეთა მყისი ცენტრის ცნება დაკავშირებულია კონკრეტულ მყარ სხეულთან. რამდენიმე სხეულისაგან (რგოლისაგან) შემდგარ მექანიზმში, ყოველ არაგადატანით მოძრავ სხეულს დროის მოცემულ მომენტში საკუთარი სიჩქარეთა მყისი ცენტრი და საკუთარი კუთხური სიჩქარე აქვს.

მყარი სხეულის ბრტყელპარალელურ მოძრაობასთან დაკავშირებული ამოცანებიდან ჩვენ განვიხილავთ შემდეგი ძირითადი ტიპის ამოცანებს:

1. მყარი სხეულის ბრტყელპარალელური მოძრაობის (ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის) განტოლებების შედგენა;

2. ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეების განსაზღვრა;

3. ბრტყელი ფიგურის წერტილების აჩქარებების განსაზღვრა.

ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები უძრავ Ox_1 და Oy_1 კოორდინატთა ღერძებზე გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით (იხ. (10.1.6) ფორმულები):

$$x_{1M} = x_A + x_M \cos \varphi - y_M \sin \varphi,$$

$$y_{1M} = y_A + x_M \sin \varphi + y_M \cos \varphi,$$

სადაც x_M და y_M არის M წერტილის კოორდინატები მოძრავ Axy კოორდინატთა სისტემაში, ხოლო x_A და y_A A პოლუსის კოორდინატებია (ნახ. 10.2).

ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეების გამოსათვლელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ანალიზური, გრაფიკული და გრაფიკული მეთოდები (ხერხები). გრაფიკულ მეთოდს არ განვიხილავთ, ვინაიდან ამ თავში განხილული საკითხების გარდა დაგეგმვით დაშვებითი მასალის შესწავლა.

ანალიზური მეთოდით ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარის გასაგებად უნდა ვიცოდეთ ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის განტოლებები (იხ. (10.1.7) ფორმულები):

$$x = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

უძრავ Ox_1 და Oy_1 კოორდინატთა ღერძებზე წერტილის სიჩქარის გეგმილები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით (იხ. (10.4.9) ფორმულები):

$$v_{Mx_1} = v_{Ax_1} - \omega(y_{1M} - y_A), \quad v_{My_1} = v_{Ay_1} + \omega(x_{1M} - x_A),$$

ხოლო მოძრავ Ax და Ay ღერძებზე კი –

$$v_{Mx} = v_{Ax} - y_M \cdot \omega = v_{Ax_1} \cos \varphi + v_{Ay_1} \sin \varphi - \omega \cdot y_M,$$

$$v_{My} = v_{Ay} - x_M \cdot \omega = -v_{Ax_1} \sin \varphi + v_{Ay_1} \cos \varphi + \omega \cdot x_M.$$

გრაფიკული მეთოდი თავის მხრივ იყოფა ორ ხერხად. ერთი ეყრდნობა

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AM}$$

ფორმულის, ხოლო მეორე, სიჩქარეთა მყისი ცენტრის ცნების გამოყენებას.

შესხენების მიზნით აღვნიშნავთ, რომ ხშირად წერტილის სიჩქარე მარტივად გამოითვლება კინემატიკის ძირითადი თეორემის (გრასჰოფის თეორემის) გამოყენებით.

ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეების გამოთვლასთან შედარებით ბევრად შრომატევადია წერტილების აჩქარებების გამოთვლის შემცველი ამოცანების ამოხსნა. გვხვდება სხვადასხვა თავისებურებების მქონე ძალიან საინტერესო ამოცანები, რომელთა ამოხსნასაც კონკრეტული მიდგომა სჭირდება. ჩვენ გავეცნობით ზოგიერთ მათგანს.

პირველ რიგში აღვნიშნოთ, რომ ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეების განსაზღვრის მსგავსად, აჩქარებების განსაზღვრის შემთხვევაშიც გვაქვს ანალიზური, გრაფიკული და გრაფიკული მეთოდები.

ანალიზური მეთოდის გამოყენებისას ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის აჩქარების გვემილები უძრავ Ox_1 და Oy_1 კოორდინატთა ღერძებზე გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} w_{Mx_1} &= w_{Ax_1} - \varepsilon(y_M - y_A) - \omega^2(x_M - x_A) \\ w_{My_1} &= w_{Ay_1} + \varepsilon(x_M - x_A) - \omega^2(y_M - y_A), \end{aligned} \quad (10.8.1)$$

ხოლო მოძრავ ღერძებზე –

$$\begin{aligned} w_{Mx} &= w_{Ax} - \varepsilon \cdot y_M - \omega^2 \cdot x_M, \\ w_{My} &= w_{Ay} + \varepsilon \cdot x_M - \omega^2 \cdot y_M. \end{aligned} \quad (10.8.2)$$

ბრტყელი ფიგურის წერტილების აჩქარებების გამოსათვლელად გრაფიკული მეთოდის გამოყენება ემყარება შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA}^{\text{ბრ}} + \vec{w}_{MA}^{\text{ც}}, \quad (10.8.3)$$

სადაც $w_{MA}^{\text{ბრ}} = \varepsilon \cdot MA$, $w_{MA}^{\text{ც}} = \omega^2 \cdot MA$. ამ მეთოდის გამოყენება მაშინ შეგვიძლია, როცა ვიცით ერთი წერტილის აჩქარება (პოლუსის), ω და ε . მოკლედ, ეს მეთოდი კარგია, როცა ვიცით φ კუთხე როგორც დროის ფუნქცია.

გაფრთხილების მიზნით: არ უნდა ავურიოთ ერთმანეთში ა) წერტილის ნორმალური აჩქარება ($\vec{w}_n$) და პოლუსის გარშემო ბრუნვის ცენტრისკენული აჩქარება ($\vec{w}_{MA}^{\text{ც}}$), ბ) წერტილის მხები აჩქარება ($\vec{w}_\tau$) და პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის აჩქარება ($\vec{w}_{MA}^{\text{ბრ}}$).

თუ დროის მოცემულ მომენტში ცნობილია ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება და მეორე ნებისმიერი წერტილის ტრაექტორია, შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფიგურის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება. ზოგ შემთხვევაში მეორე წერტილის ტრაექტორიის ნაცვლად საკმარისია ვიცოდეთ სიჩქარეთა მყისი ცენტრის მდებარეობა.

ამოცანა 10.1. წრფივი მიმმართველების გასწვრივ მოსრიდლე A და B ქუროები ერთმანეთთან შეერთებულია l სიგრძის AB ღეროთი (ნახ. 10.13). A ქურო მოძრაობს მუდმივი v სიჩქარით. დაწერეთ AB ღეროს მოძრაობის განტოლებები, თუ ვიცოდეთ, რომ A ქურო იწყებს მოძრაობას O წერტილიდან. პოლუსად მიიღეთ A წერტილი. BOA კუთხე უდრის $\pi - \alpha$.

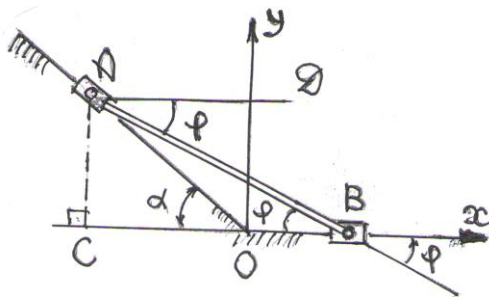
ამოხსნა. პირობის თანახმად, A ქურო მოძრაობას იწყებს O წერტილიდან მუდმივი v სიჩქარით, ამიტომ $OA = vt$. $\triangle AOC$ -დან $x_A = -OC = -OA \cos \alpha = -vt \cos \alpha$; $y_A = AC = vt \sin \alpha$. $\varphi = \angle DAB = \angle ABO$; $\triangle ABC$ -დან $AC = AB \sin \varphi = l \sin \varphi \Rightarrow vt \sin \alpha = l \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = vt \sin \alpha / l \Rightarrow \varphi = \arcsin(vt \sin \alpha / l)$.

პასუხი. $x_A = -vt \cos \alpha$, $y_A = vt \sin \alpha$, $\varphi = \arcsin(vt \sin \alpha / l)$.

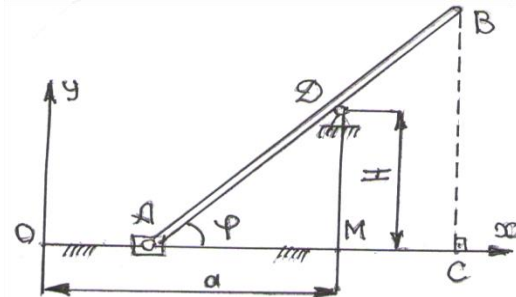
ამოცანა 10.2. AB ღეროს A ბოლო სრიალებს წრფივი მიმმართველის გასწვრივ მუდმივი v სიჩქარით, ამასთან მოძრაობის დროს ღერო ეყრდნობა D წკირს (ნახ. 10.14). დაწერეთ AB ღეროსა და მისი ბოლო B წერტილის მოძრაობის განტოლებები. ღეროს სიგრძე უდრის l -ს. D წკირი იმყოფება მიმმართველის ზემოთ H სიმაღლეზე. მოძრაობის დასაწყისში ღეროს A ბოლო ემთხვეოდა უძრავი კოორდინატთა სისტემის O სათავეს; $OM = a$. პოლუსად მიიღეთ A წერტილი.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, A წერტილი მოძრაობას იწყებს O წერტილიდან მუდმივი v სიჩქარით, ამიტომ $x_A = OA = vt$ და $y_A = 0 \Rightarrow AM = OM - OA = a - vt$. $\triangle ADM$ -დან $\operatorname{tg} \varphi = DM / AM = H / (a - vt) \Rightarrow \cos \varphi = (a - vt) / \sqrt{H^2 + (a - vt)^2}$, $\sin \varphi = H / \sqrt{H^2 + (a - vt)^2}$. $\triangle ABC$ -დან $AC = AB \cos \varphi = l(a - vt) / \sqrt{H^2 + (a - vt)^2}$, $BC = AB \sin \varphi = Hl / \sqrt{H^2 + (a - vt)^2} \Rightarrow x_B = OA + AC = vt + l(a - vt) / \sqrt{H^2 + (a - vt)^2}$, $y_B = BC = Hl / \sqrt{H^2 + (a - vt)^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = H / (a - vt) \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(H / (a - vt))$.

პასუხი. $x_A = vt$, $y_A = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg}(H / (a - vt))$; $x_B = x_B = vt + l(a - vt) / \sqrt{H^2 + (a - vt)^2}$, $y_B = Hl / \sqrt{H^2 + (a - vt)^2}$.



ნახ. 10.13



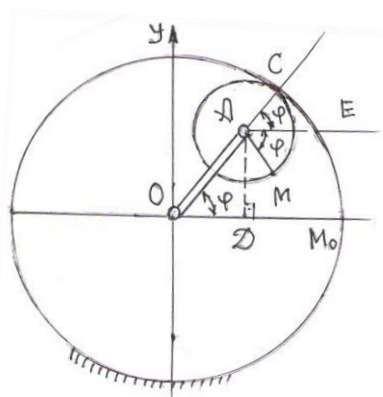
ნახ. 10.14

ამოცანა 10.3. R რადიუსის კბილანას შიგნით მგორავი r რადიუსის კბილანა მოძრაობაში მოყავს უძრავი კბილანას O ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით თანაბრად მბრუნავი OA მრუდმხარას (ნახ. 10.15). როცა $t=0$, მაშინ $\varphi=0$. შეადგინეთ მოძრავი კბილანას მოძრაობის განტოლებები, თუ პოლუსად მივიღებთ A ცენტრს.

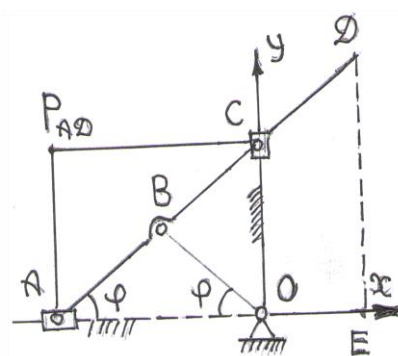
ამოხსნა. პირობის თანახმად, მრუდმხარა ბრუნავს თანაბრად, ამიტომ $\varphi = \omega t$. $\triangle AOD$ -დან $x_A = OA \cos \varphi = (R - r) \cos \omega t$, $y_A = (R - r) \sin \omega t$. საწყის მომენტში A წერტილი იმყოფებოდა Ox ღერძზე. ნახ. 10.15-ის მიხედვით, OA მრუდმხარა ბრუნავს სა-

ათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, რის გამოც პატარა კბილანა ბრუნავს საწინააღმდეგო მიმართულებით. ნახაზზე მოცემული მრუდმხარასა და პატარა კბილანას განლაგების შესაბამისი დროის მომენტისათვის კბილანა A პოლუსის გარშემო შემობრუნდა EAM კუთხით. აღვნიშნოთ ამ კუთხის სიდიდე φ_1 -ით. გავიგოთ ეს კუთხე. ცხადია, კბილანას შემთხვევაში სრიალი გამოირიცხვლია, ამიტომ რკალი CM_0 უდრის რკალ CM -ს, რომელიც თავის მხრივ CE და EM რკალების ჯამია $\Rightarrow$ (გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ წრიული რკალის სიგრძე უდრის შესაბამისი ცენტრული კუთხის სიდიდისა და რადიუსის ნამრავლს) $R \cdot \varphi = r(\varphi + \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = ((R/r) - 1) \cdot \varphi = ((R/r) - 1) \cdot \omega t$.

პასუხი. $x_A = (R - r) \cos \omega t$, $y_A = (R - r) \sin \omega t$, $\varphi_1 = ((R/r) - 1) \cdot \omega t$; ნიშანი მინუსი იმაზე მიგვითითებს, რომ კბილანა ბრუნავს მრუდმხარას ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



ნახ. 10.15



ნახ. 10.16

ამოცანა 10.4. O ღერძის გარშემო $\omega = 2$ რად/წმ მუდმივი კუთხური სიჩქარით მბრუნავი OB ღერო ამოძრავებს AD ღეროს, რომლის A და C წერტილები მოძრაობს შესაბამისად ჰორიზონტალურ Ox და ვერტიკალურ Oy ღერძებზე (ნახ.10.16). განსაზღვრეთ AD ღეროს D წერტილის სიჩქარე, როცა $\varphi = 45^\circ$, და იპოვეთ ამ წერტილის ტრაექტორიის განტოლება, თუ $AB = OB = BC = CD = 12$ სმ.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, $\angle BAO = \angle BOA = \varphi = \omega t = 2t$ რად/წმ. $\square ADE$ -დან

$$x_D = OE = CD \cos \varphi = 12 \cos \varphi, \quad y_D = 36 \sin \varphi \Rightarrow \left(\frac{x_D}{12} \right)^2 + \left(\frac{y_D}{36} \right)^2 = 1.$$

$$\text{სიჩქარის განსაზღვრის თანახმად, } v_{Dx} = \frac{dx_D}{dt} = \frac{d}{dt}(12 \cos \varphi) = -12 \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} =$$

$$-12 \omega \sin \varphi = -12 \cdot 2 \sin 45^\circ = -12\sqrt{2} \quad \text{სმ/წმ; } v_{Dy} = \frac{dy_D}{dt} = \frac{d}{dt}(36 \sin \varphi) = 36\sqrt{2} \quad \text{სმ/წმ} \Rightarrow$$

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = \sqrt{(-12\sqrt{2})^2 + (36\sqrt{2})^2} = 53,66 \quad \text{სმ/წმ.}$$

პასუხი. $v_D = 53,67$ მ/წმ; $\left(\frac{x_D}{12}\right)^2 + \left(\frac{y_D}{36}\right)^2 = 1$.

ამოცანა 10.5. (ფერგიუსონის პარადოქსი) O_1 ცენტრის გარშემო მბრუნავ O_1O_3 ღეროზე დამაგრებულია სამი ერთმანეთთან გადაბმული r_1, r_2 და $r_3 = r_1$ რადიუსის I, II და III თვალის ღერძები. I თვალი უძრავია. განსაზღვრეთ III თვალის მოძრაობა, თუ ღერო ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით.

ამოხსნა. O_2 და O_3 ღეროს წერტილებია, ამიტომ $v_2 = O_1O_2 \cdot \omega = (r_1 + r_2) \cdot \omega$, $v_3 = O_1O_3 \cdot \omega = 2(r_1 + r_2) \cdot \omega$.

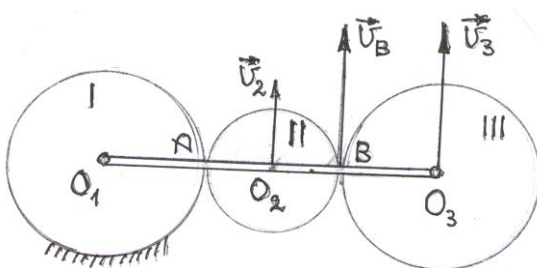
ვთქვათ, A არის I და II თვლების შეხების წერტილი. I თვალი უძრავია, ამიტომ A არის II თვალის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი $\Rightarrow v_2 = r_2 \cdot \omega$. B-თი აღვნიშნოთ II და III თვლების შეხების წერტილი, ამიტომ $v_B = 2r_2 \cdot \omega = 2v_2 = 2(r_1 + r_2) \cdot \omega$. მივიღეთ, რომ III თვალის ორ B და O_3 წერტილს აქვს ერთნაირი $2(r_1 + r_2) \cdot \omega$ სიჩქარე. აქედან გამომდინარეობს, რომ III თვალის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ სხეული ასრულებს მყის-გადატანით მოძრაობას.

პასუხი. III თვალი ასრულებს მყის-გადატანით მოძრაობას $2(r_1 + r_2)\omega$ სიჩქარით.

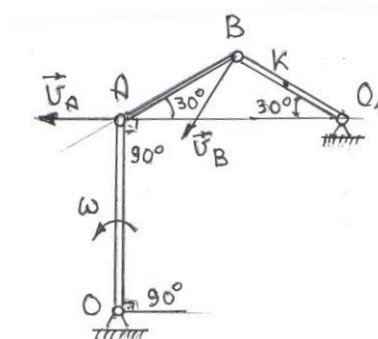
ამოცანა 10.6. ნახ. 10.18-ზე მოცემული $OABO_1$ ოთხკუთხედიანი მექანიზმის მდგომარეობაში განსაზღვრეთ მისი K წერტილის სიჩქარე, თუ 20 სმ სიგრძის OA რგოლს ამ მომენტში აქვს $\omega = 2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარე. K წერტილი BO_1 ღეროს შუა წერტილია.

ამოხსნა. OA მრუდმხარა ბრუნავს თანაბრად, ამიტომ $v_A = \omega \cdot OA = 2 \cdot 20 = 40$ სმ/წმ. $\vec{v}_A$ ვექტორი მართობია OA მრუდმხარასი და AB ბარბაცასთან ადგენს 30° -იან კუთხეს. B წერტილის $\vec{v}_B$ სიჩქარე AB მრუდმხარასთან ადგენს 30° -იან კუთხეს. გრასჰოფის თეორემის თანახმად, გეგმ $_{AB}(\vec{v}_A) =$ გეგმ $_{AB}(\vec{v}_B) \Leftrightarrow v_A \cos 30^\circ = v_B \cos 30^\circ \Rightarrow v_B = v_A = 40$ სმ/წმ. K წერტილი BO_1 მრუდმხარას შუა წერტილია, ამიტომ $v_K = v_B / 2 = 20$ სმ/წმ.

პასუხი. 20 სმ/წმ.



ნახ. 10.17



ნახ. 10.18

ამოცანა 10.7. ორი პარალელური AB და CD კბილანა ლარტყა მოდებშია R რადიუსის კბილანა თვალთან (ნახ.10.19,ა). AB ლარტყა მოძრაობს $\vec{v}_1$, ხოლო CD ლარტყა - v_2 სიჩქარით ($(v_2 < v_1)$). განსაზღვრეთ თვალის ω კუთხური სიჩქარე, მისი O ცენტრის $\vec{v}_o$ სიჩქარე და P სიჩქარეთა მყისი ცენტრი შემდეგ შემთხვევებში:

1. როცა ლარტყები მოძრაობენ ერთი მიმართულებით,
2. როცა მეორე ლარტყა მოძრაობს მარცხნივ.

ამოხსნა. 1. როცა M და N წერტილები ერთი მიმართულებით მოძრაობენ, მაშინ კბილანას სიჩქარეთა მყისი ცენტრის მოსაძებნად უნდა ვიპოვოთ M და N წერტილებსა და მათი სიჩქარეების $\vec{v}_M = \vec{v}_1$ და $\vec{v}_N = \vec{v}_2$ ვექტორების ბოლოებზე გამავალი წრფეების გადაკვეთის P წერტილი. ნახ. 10.19,ბ-დან კარგად ჩანს, რომ P წერტილი M და N წერტილების გარეთ მდებარეობს. საძიებელი $\vec{v}_o$ წერტილის სიჩქარის სიდიდე $MNKL$ ტრაპეციის შუახაზის ტოლია, ე.ი. $v_o = (v_1 + v_2)/2$.

გავიგოთ PN . სამკუთხედების მსგავსებიდან: $PN/PM = v_2/v_1 \Rightarrow PN/(PN + 2R) = v_2/v_1 \Rightarrow PN = 2Rv_2/(v_1 - v_2)$. მაშინ $v_2 = \omega \cdot PN \Rightarrow \omega = v_2/PN = v_2(v_1 - v_2)/2Rv_2 = (v_1 - v_2)/2R$, $OP = R + PN = R + 2Rv_2/(v_1 - v_2) = R(v_1 + v_2)/(v_1 - v_2)$

2. როცა M და N წერტილები სხვადასხვა მხარეს მოძრაობენ, მაშინ P წერტილი M და N წერტილებს შორის მდებარეობს (ნახ. 10.19,გ). განვსაზღვროთ PN . ადვილად მივიღებთ: $PN/PM = v_2/v_1 \Rightarrow PN/(2R - PN) = v_2/v_1 \Rightarrow PN = 2Rv_2/(v_1 + v_2)$. მაშინ $v_2 = \omega \cdot PN \Rightarrow \omega = (v_1 + v_2)/2R$.

გავიგოთ $OP = R - PN = R(v_1 - v_2)/(v_1 + v_2)$. გამოვთვალოთ $v_o = \omega \cdot OP = ((v_1 + v_2)/2R) \cdot (R(v_1 - v_2)/(v_1 + v_2)) = (v_1 - v_2)/2$.

პასუხი. 1. $\omega = -\frac{v_1 - v_2}{2R}$, $v_o = \frac{v_1 + v_2}{2}$, $OP = R \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}$;

2. $\omega = -\frac{v_1 + v_2}{2R}$, $v_o = \frac{v_1 - v_2}{2}$, $OP = R \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$.

კუთხური სიჩქარის მინუსიანი იმაზე მიგვითითებს, რომ კბილანა ბრუნავს საათის ისრის ბრუნვის თანხვედრილი, ე.ი. უარყოფითი მიმართულებით.

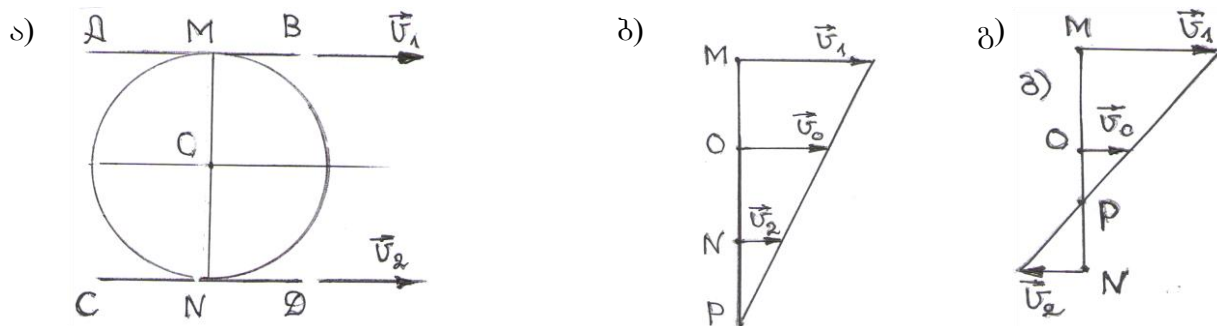
ამოცანა 10.8. $R=0,5$ მ რადიუსის თვალი უსრიალოდ გორავს გზის წრფივ უბანზე (ნახ. 10.20). მისი ცენტრის სიჩქარე მუდმივია და უდრის $v_o=10$ მ/წმ-ს. იპოვეთ თვალის ვერტიკალური და ჰორიზონტალური დიამეტრების M_1 , M_2 , M_3 და M_4 ბოლოების სიჩქარეები და აგრეთვე, განსაზღვრეთ მისი კუთხური სიჩქარე.

ამოხსნა. ამ ამოცანიდან ირკვევა, რომ თუ ვიცით თანაბრად მოძრავი თვალის ერთი, კერძოდ, ცენტრის სიჩქარე, შეგვიძლია გავიგოთ მისი ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე.

უძრავ ზედაპირთან შეხების M_1 წერტილი არის თვალის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ე.ი. $v_1=0$. მაშინ $v_o = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = v_o / R = 10/0,5 = 20$ რად/წმ. ადვილად მივიღებთ: $v_3 = \omega \cdot 2R = 2v_o = 20$ მ/წმ; $v_2 = v_4 = \omega \cdot R\sqrt{2} = 14,14$ მ/წმ.

პასუხი. $\omega = 20$ რად/წმ; $v_1 = 0$; $v_2 = v_4 = 14,14$ მ/წმ; $v_3 = 20$ მ/წმ.

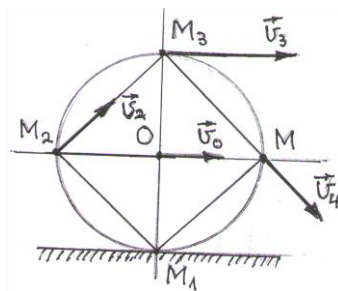
ამოცანა 10.9. L კოჭთან უჭიმარი ძაფით დაკავშირებული K ტვირთი ეშვება ვერტიკალურად ქვევით $x = t^2$ მ კანონით (ნახ. 10.21). L კოჭი უსრიალოდ გორავს უძრავი ჰორიზონტალური რელსის გასწვრივ. განსაზღვრეთ დროის $t=1$ წმ მომენტში ნახაზზე გამოსახული მდებარეობისათვის კოჭის C, A, B, O და E წერტილების სიჩქარეები. გაიგეთ, აგრეთვე, კოჭის კუთხური სიჩქარე, თუ $AD \perp OE$, ხოლო $OD = 2 \cdot OC = 0,2$ მ.



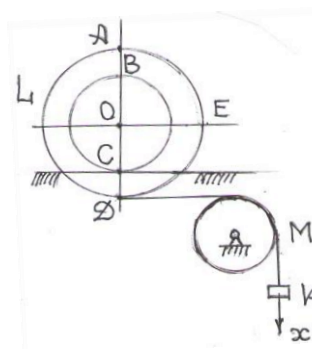
ნახ. 10.19

ამოხსნა. ძაფის უჭიმარობის გამო მის D და M წერტილებს სიდიდით ტოლი სიჩქარეები აქვთ: $v_D = v_M = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$ მ/წმ. როცა $t=1$ წმ, მაშინ $v_D = 2$ მ/წმ. C წერტილი არის კოჭის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ამიტომ $v_D = \omega \cdot CD \Rightarrow \omega = 2/0,1 = 20$ რად/წმ. მაშინ $v_o = \omega \cdot CO = 20 \cdot 0,1 = 2$ მ/წმ; $v_B = \omega \cdot CB = 20 \cdot 0,2 = 4$ მ/წმ; $v_A = \omega \cdot CA = 20 \cdot 0,3 = 6$ მ/წმ; $v_E = 20 \cdot \sqrt{0,1^2 + 0,2^2} = 20 \cdot 0,1\sqrt{5} \approx 2 \cdot 2,236 \approx 4,47$ მ/წმ.

პასუხი. $v_C = 0$, $v_A = 6$ მ/წმ, $v_B = 4$ მ/წმ, $v_o = 2$ მ/წმ, $v_E = 4,47$ მ/წმ, $\omega = 20$ რად/წმ.



ნახ. 13.20



ნახ. 13.21

ამოცანა 10.10. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის $OA=r$ სიგრძის მრუდმხარა ბრუნავს ω_{OA} კუთხური სიჩქარით (ნახ. 10.22). ბარბაცას სიგრძე $AB=l$. მოცემული φ კუთხისათვის განსაზღვრეთ: 1) B ცოცხას სიჩქარე, 2) ბარბაცას ω_{AB} კუთხური სიჩქარე, 3) ბარბაცას იმ წერტილის მდებარეობა, რომლის სიჩქარე უმცირესია.

ამოხსნა. მრუდმხარა ასრულებს მხოლოდ ბრუნვით მოძრაობას, ამიტომ $\vec{v}_A$ ვექტორი მართობია OA -სი და მისი მოდული $v_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA} \cdot r$. B წერტილის $\vec{v}_B$ სიჩქარე მიმართულია BO -ს გასწვრივ. გრასჰოფის თეორემის თანახმად,

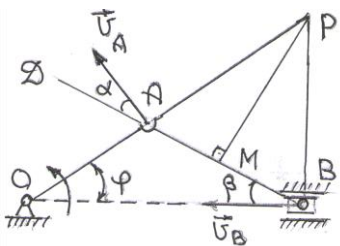
$$\text{გპგმ}_{AB}(\vec{v}_A) = \text{გპგმ}_{AB}(\vec{v}_B) \Leftrightarrow v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta. \quad (a)$$

ნახ. 10.11-დან $90^\circ - \alpha = \beta + \varphi \Rightarrow \alpha = 90^\circ - (\beta + \varphi) \Rightarrow \cos \alpha = \sin(\beta + \varphi)$. მაშინ $v_B = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot v_A = \frac{\sin(\beta + \varphi)}{\cos \beta} \omega_{OA} \cdot r = (\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \text{tg} \beta) \omega_{OA} \cdot r$. ამ ტოლობიდან გამოვრიცხოთ β

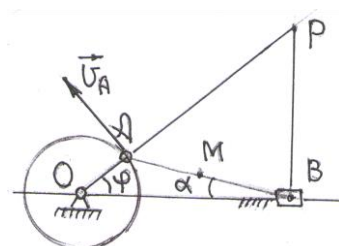
პარამეტრი. $\triangle OAB$ -დან $\frac{\sin \beta}{r} = \frac{\sin \varphi}{l}$, $\text{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} \Rightarrow \text{tg} \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi / \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi} =$

$$= \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}. \text{ მაშინ } v_B = \left(\sin \varphi + \cos \varphi \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \cdot \omega_{OA} \cdot r \Rightarrow$$

$$v_B = r \cdot \omega_{OA} \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \cdot \sin \varphi \quad (b)$$



ნახ. 10.22



ნახ. 13.23

P წერტილი AB ბარბაცას სიჩქარეთა მყისი ცენტრია, ამიტომ $v_B = \omega_{AB} \cdot PB$ და $v_A = \omega_{AB} \cdot PA \Rightarrow \omega_{AB} = v_B / PB = v_A / PA$. PB -ს (ან PA -ს) სიგრძე განისაზღვრება ამოცანაში მოცემული სიდიდეებით.

ადვილი მისახვედრია, რომ ბარბაცას წერტილებიდან უმცირესი სიჩქარე აქვს იმ წერტილს, რომელიც ყველაზე ახლოსაა P -სთან. ეს კი ბარბაცას ის M წერტილია, რომელიც მდებარეობს მის PM მართობზე.

$$\text{პასუხი. 1) } v_B = r \cdot \omega_{OA} \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \cdot \sin \varphi;$$

$$2) \omega_{AB} = v_A / PA = v_B / PB;$$

3) AB -სა და მისი მართობი PM -ის გადაკვეთის M წერტილი.

ამოცანა 10.11. მრუდმხარა მექანიზმში მრუდმხარის სიგრძე $r = OA = 40$ სმ, ბარბაცას სიგრძე $l = AB = 2$ მ (ნახ. 10.23). მრუდმხარა თანაბრად ბრუნავს 180 ბრ/წთ-ის შესაბამისი კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ ბარბაცას ω კუთხური სიჩქარე და მისი შუა M წერტილის სიჩქარე მრუდმხარას ოთხი მდებარეობისათვის, რომელთათვისაც AOB კუთხე შესაბამისად უდრის: $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

ამოხსნა. A წერტილის $\vec{v}_A$ სიჩქარე მართობია OA წრფის, ხოლო B წერტილის $\vec{v}_B$ სიჩქარე - OB წრფის, ამიტომ ამ წრფეების გადაკვეთის P წერტილი AB ბარბაცას სიჩქარეთა მყისი ცენტრია. ადვილად გავიგებთ A წერტილის სიჩქარის სიდიდეს: $v_A = \omega_{OA} \cdot OA$. პირობის თანახმად, $\omega_{OA} = 2\pi n = 360\pi$ რად/წთ $\Rightarrow \omega_{OA} = 360\pi/60 = \pi$ რად/წმ.

განვსაზღვროთ α კუთხე. $\square AOB$ -ში $OA \sin \varphi = AB \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \varphi \Rightarrow$

$\cos \alpha = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$ (α კუთხე 90° -ზე ნაკლებია, ამიტომ $\cos \alpha > 0$). თუ მოვახერხებთ AP მონაკვეთის სიგრძის გაგებას, მაშინ $v_A = \omega_{AB} \cdot AP$ ტოლობიდან გავიგებთ ω_{AB} -ს. $\square PAE$ -დან $AE = AP \cos \varphi$; $\square ABE$ -დან $AE = AB \cos \alpha \Rightarrow AP \cos \varphi = AB \cos \alpha \Rightarrow$

$AP = l \cos \alpha / \cos \varphi$. მაშინ $\omega_{AB} = v_A / AP = \frac{r \cos \varphi}{l \cos \alpha} \omega_{OA}$. შევიტანოთ $\cos \alpha$ -სთვის ზემოთ მი-

ღებული მნიშვნელობა და გვექნება: $\omega_{AB} = r \cos \varphi \cdot \omega_{OA} / \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$. მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის გარემოება, რომ ბარბაცა ბრუნავს მრუდმხარას ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ამიტომ

$$\omega_{AB} = -\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \omega_{OA} = -\frac{6\pi r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (ა)$$

M წერტილის სიჩქარის გასაგებად დავადგინოთ მისი კოორდინატების გამოსათვლელი ფორმულები. ნახ. 10.23-დან: $x_M = OC + CD = r \cos \varphi + l \cos \alpha / 2 = r \cos \varphi +$

$\frac{1}{2} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$; $y_M = \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{r}{2} \sin \varphi \Rightarrow$ (გავითვალისწინოთ: $\dot{\varphi} = \omega_{OA} = 6\pi$ რად/წმ)

$$v_{Mx} = \dot{x}_M = -r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-r^2 2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{2 \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} = -6\pi r \sin \varphi \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right);$$

$$v_{My} = \dot{y}_M = \frac{r}{2} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = 3\pi r \cos \varphi.$$

განვიხილოთ მრუდმხარას ოთხი მდებარეობა:

I. $\varphi = 0$. ამ შემთხვევაში $\omega_{AB} = -6\pi r / l = -1,2\pi$ რად/წმ; $v_{Mx} = 0$, $v_M = v_{My} = 3\pi r = 376,8$ სმ/წმ.

II. $\varphi = \pi/2$. ამ შემთხვევაში $\omega_{AB} = 0$; $v_{Mx} = -6\pi r = -753,6$ სმ/წმ, $v_{My} = 0 \Rightarrow v_M = 753,6$ სმ/წმ.

III. $\varphi = \pi$. ამ შემთხვევაში შემთხვევაში $\omega_{AB} = 6\pi r / l = 1,2\pi$ რად/წმ; $v_{Mx} = 0$, $v_{My} = -3\pi r \Rightarrow v_M = 376,8$ სმ/წმ.

IV. $\varphi = 3\pi/2$. ამ შემთხვევაში $\omega_{AB} = 0$; $v_{Mx} = -6\pi r \cdot (-1) = 753,6$ სმ/წმ, $v_{My} = 0 \Rightarrow v_M = 753,6$ სმ/წმ.

პასუხი. I. $\omega = -1,2\pi$ რად/წმ, $v_M = 376,8$ სმ/წმ; II. $\omega = 0$, $v_M = 753,6$ სმ/წმ;

III. $\omega = 1,2\pi$ რად/წმ, $v_M = 376,8$ სმ/წმ; IV. $\omega = 0$, $v_M = 753,6$ სმ/წმ.

ამოცანა 10.12. ABCD მართკუთხედი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. მოცემულ მომენტში A წერტილის აჩქარება w_A სმ/წმ² და AB წრფესთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. B წერტილის აჩქარება w_B სმ/წმ² და AM წრფესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს (ნახ. 10.24). მონაკვეთების სიგრძეებია: AB=10 სმ, BC=5 სმ. გაიგეთ მართკუთხედის მყისი სიჩქარე და მყისი აჩქარება, აგრეთვე, C წერტილის აჩქარება.

ამოხსნა. პოლუსად ავირჩიოთ A წერტილი, მაშინ

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{CA}^{\text{ბრ}} + \vec{w}_{CA}^{\text{ც}}. \quad (\text{ა})$$

(ა) ტოლობა დავაგეგმილთ x და y ღერძებზე, მივიღებთ ნახ. 10. ა):

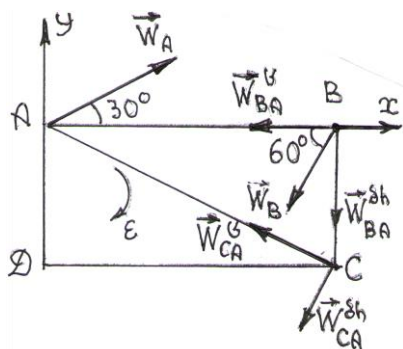
$$\begin{aligned} -w_B \cos 60^\circ &= w_A \cos 30^\circ - w_{BA}^{\text{ც}}, \\ -w_B \sin 60^\circ &= w_A \sin 30^\circ - w_{BA}^{\text{ბრ}}. \end{aligned} \quad (\text{ბ})$$

(ბ) სისტემაში შევიტანოთ: $w_{BA}^{\text{ც}} = \omega^2 \cdot BA = 10\omega^2$, $w_{BA}^{\text{ბრ}} = \varepsilon \cdot AB = 10\varepsilon$, w_A , $w_B = 6$ და მივიღებთ:

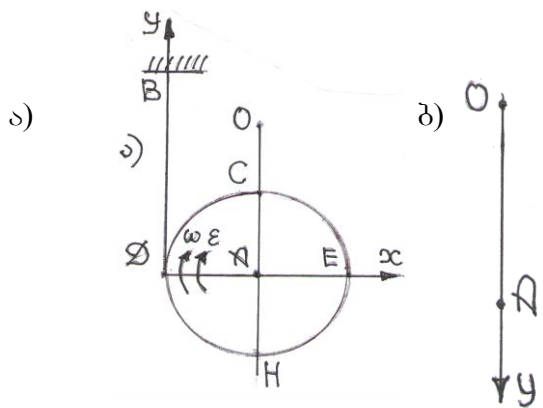
$$\begin{cases} 6 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10\omega^2, \\ -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 10\varepsilon. \end{cases} \Rightarrow \omega \approx 0,69 \text{ რად/წმ}; \varepsilon \approx 0,62 \text{ რად/წმ}^2.$$

გადავიდეთ C წერტილის აჩქარების გაგებაზე. პოლუსად ავირჩიოთ B წერტილი და გვექნება (ნახ. 10.24):

$$\vec{w}_C = \vec{w}_B + \vec{w}_{CB}^{\text{ბრ}} + \vec{w}_{CB}^{\text{ც}}. \quad (\text{გ})$$



ნახ. 10.24



ნახ. 10.25, ა, ბ

დავაგეგმილოთ (გ) ტოლობა არჩეულ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$w_{Cx} = -w_B \cos 60^\circ - w_{CB}^x = -6 \cdot 0,5 - \varepsilon \cdot CB = -3 - 0,62 \cdot 5 = -6,10 \text{ სმ/წმ}^2;$$

$$w_{Cy} = -w_B \sin 60^\circ + w_{CB}^y = -6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \omega^2 \cdot CB = -3 \cdot 1,73 + 0,69^2 \cdot 5 = -2,82 \text{ სმ/წმ}^2.$$

აღვიღად მივიღებთ:

$$w_C = \sqrt{w_{Cx}^2 + w_{Cy}^2} = \sqrt{45,162} \approx 6,72 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{w}_C$ ვექტორის მიმართულებისთვის გვაქვს:

$$\cos(\vec{w}_C, ^\wedge x) = \frac{w_{Cx}}{w_C} \approx \frac{-6,1}{6,72} \approx -0,908; \quad \cos(\vec{w}_C, ^\wedge y) = \frac{w_{Cy}}{w_C} \approx \frac{-2,82}{6,72} \approx -0,420.$$

პასუხი. $\omega \approx 0,69$ რად/წმ; $\varepsilon \approx 0,62$ რად/წმ²; $w_C \approx 0,72$ სმ/წმ²;

$$\cos(\vec{w}_C, ^\wedge x) \approx -0,908; \quad \cos(\vec{w}_C, ^\wedge y) \approx -0,420.$$

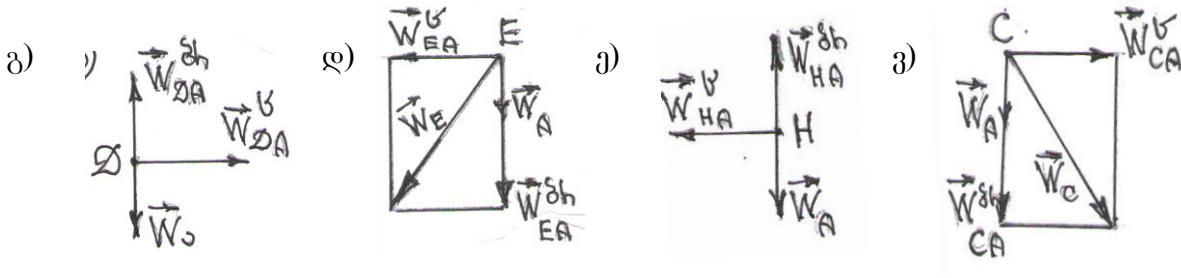
ამოცანა 10.13. A ცილინდრი ვარდნისას შლის დახვეულ ძაფს (ნახ. 10.25,ა). ცილინდრის სიქარის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$v_A = \frac{2}{3} \sqrt{3gy}, \quad (\text{ა})$$

სადაც y ცილინდრის ცენტრის მიერ გავლილი მანძილია. ცილინდრის რადიუსი r - ის ტოლია. განსაზღვრეთ ცილინდრის D, C, E და H წერტილების აჩქარებები.

ამოხსნა. ვთქვათ, ცილინდრის ცენტრი საწყის მომენტში იმყოფება O წერტილში (ნახ. 10.25,ბ). იგი მოძრაობს y ღერძის გასწვრივ, ამიტომ

$$v_A = v_{Ay} = \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3} \sqrt{3gy} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{3} \sqrt{3g} dt \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{2}{3} \sqrt{3g} t + C.$$



ნახ. 10.25

საწყის მომენტში, როცა $t=0$, მაშინ $y=0$. ამ პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $C=0$. მაშინ $\sqrt{y} = \frac{1}{3} \sqrt{3g} t \Rightarrow y = \frac{g}{3} t^2 \Rightarrow v_A = \frac{2}{3} g t$.

ცილინდრის ცენტრი მოძრაობს წრფივად, ამიტომ

$$w_A = \frac{dv_A}{dt} = \frac{2}{3} g. \quad (\text{ბ})$$

ამგვარად, გავიგეთ ცილინდრის ერთი წერტილის აჩქარება. ცხადია, ამ წერტილს, ე.ი. A წერტილს, ავირჩევთ პოლუსად. ცილინდრის სხვა წერტილების აჩქარების გასაგებად უნდა ვიცოდეთ ამ სხეულის ω კუთხური სიჩქარე და ε კუთხური აჩქარება. გამოვთვალოთ ეს სიდიდეები.

გაშლილი ძაფის ყოველი წერტილის სიჩქარე უდრის ნულს, ამიტომ D წერტილი ცილინდრის სიჩქარეთა მყისი ცენტრია $\Rightarrow$

$$v_A = DA \cdot \omega = r \omega \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r}, \quad v_A = \frac{2}{3} g t \Rightarrow \omega = \frac{2}{3} \frac{g}{r} t \Rightarrow \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{g}{r}. \quad (3)$$

მივიღეთ: ვიცით ცილინდრის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება და მისი ერთი წერტილის აჩქარება. ამის შემდეგ ცილინდრის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება შეგვიძლია განვსაზღვროთ (10.8.3) ფორმულით.

დავიწყოთ D წერტილიდან. (10.8.3) ფორმულა ამ შემთხვევაში ასე ჩაიწერება:

$$\vec{w}_D = \vec{w}_A + \vec{w}_{DA}^{\text{ბრ}} + \vec{w}_{DA}^{\text{ც}} \Rightarrow (\text{იხ. ნახ. 10.25, გ}) \quad w_{Dx} = w_{DA}^{\text{ც}} = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{2}{3} \frac{g}{r} t \right)^2 \cdot r = \frac{4}{9} \frac{g}{r} t^2;$$

$$w_{Dy} = w_A - w_{DA}^{\text{ბრ}} = \frac{2}{3} g - \varepsilon \cdot r = \frac{2}{3} g - \frac{2}{3} \frac{g}{r} r = 0 \Rightarrow w_D = w_{DA}^{\text{ც}} = \frac{4}{9} \frac{g}{r} t^2.$$

$\vec{w}_D$ ვექტორი მიმართულია DA წრფის გასწვრივ.

გადავიდეთ E წერტილის აჩქარების განსაზღვრაზე. (10.8.3) გვაძლევს:

$$\vec{w}_E = \vec{w}_A + \vec{w}_{EA}^{\text{ბრ}} + \vec{w}_{EA}^{\text{ც}} \Rightarrow (\text{იხ. ნახ. 10.25, დ}) \quad w_{Ex} = -w_{EA}^{\text{ც}}, \quad w_{Ey} = w_A + w_{EA}^{\text{ბრ}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} w_E &= \sqrt{(w_{EA}^{\text{ც}})^2 + (w_A + w_{EA}^{\text{ბრ}})^2} = \sqrt{(-\omega^2 r)^2 + (w_A + \varepsilon \cdot r)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{9} \frac{g^2}{r^2} t^2 r \right)^2 + \left(\frac{2}{3} g + \frac{2}{3} \frac{g}{r} r \right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{16}{81} \frac{g^4}{r^2} t^4 + \frac{16}{9} g^2} = \frac{4}{3} g \sqrt{1 + \frac{g^2 t^4}{9 r^2}}. \end{aligned}$$

$\vec{w}_E$ ვექტორის მიმართულება გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos(\vec{w}_E, \hat{x}) = \frac{w_{Ex}}{w_E} = -\frac{g t^2}{3 r \sqrt{1 + g^2 t^4 / 9 r^2}}, \quad \cos(\vec{w}_E, \hat{y}) = \frac{w_{Ey}}{w_E} = -\frac{1}{\sqrt{1 + g^2 t^4 / 9 r^2}}.$$

ანალოგიურად გამოითვლება H (იხ. ნახ. 10.25, ე) და C (იხ. ნახ. 10.25, ვ) წერტილების აჩქარებები.

პასუხი. $w_D = \frac{4}{9} \frac{g}{r} t^2$, $\vec{w}_D$ ვექტორი მიმართულია DA წრფის გასწვრივ;

$$w_E = \frac{4}{3} g \sqrt{1 + \frac{g^2 t^4}{9 r^2}}, \quad \cos(\vec{w}_E, \hat{x}) = -\frac{g t^2}{3 r \sqrt{1 + g^2 t^4 / 9 r^2}}, \quad \cos(\vec{w}_E, \hat{y}) = -\frac{1}{\sqrt{1 + g^2 t^4 / 9 r^2}}.$$

$$w_H = \frac{2}{3} g \sqrt{1 + \left(1 - \frac{2}{3} \frac{g t^2}{r} \right)^2}, \quad \cos(\vec{w}_H, \hat{x}) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 - (2 g t^2 / 3 r) \right)^2}}, \quad \cos(\vec{w}_H, \hat{y}) =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \frac{gt^2}{r} - 1}{\sqrt{1 + \left(1 - \left(2gt^2/3r\right)\right)^2}}; \quad w_C = \frac{2}{3} g \sqrt{1 + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{gt^2}{r}\right)}, \quad \cos(\vec{w}_C, \hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 + 2gt^2/3r\right)^2}},$$

$$\cos(\vec{w}_C, \hat{y}) = -\frac{\frac{2}{3} \frac{gt^2}{r} + 1}{\sqrt{1 + \left(1 + \left(2gt^2/3r\right)\right)^2}}.$$

ამოცანა 10.14. გამოიკვლიეთ ბოლოებით Ox და Oy ღერძებზე მოსრიადე l სიგრძის წრფივი მონაკვეთის მოძრაობა. A წერტილი მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ მუდმივი $\vec{u}$ სიქარით (ნახ 10.26). გაიგეთ მონაკვეთის მეორე B ბოლოს Oy ღერძის გასწვრივ მოძრაობის კანონი, მისი $\vec{v}_B$ სიქარე და $\vec{w}_B$ აჩქარება, როგორც დროის ფუნქციები, აგრეთვე მონაკვეთის ω კუთხური სიქარე და ε კუთხური აჩქარება, ასევე, როგორც დროის ფუნქციები.

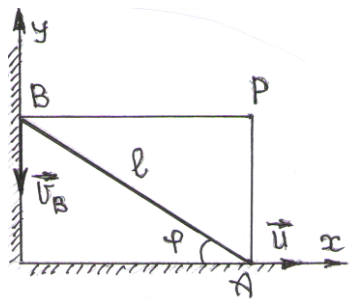
ამოხსნა. ვიგულისხმობ, რომ საწყის მომენტში A წერტილი იმყოფებოდა O წერტილში, მაშინ $OA = ut = AB \cos \varphi = l \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = ut/l \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{l^2 - u^2 t^2}$. ნახ. 10.25-დან $y_B = OB = l \sin \varphi = \sqrt{l^2 - u^2 t^2}$ ამგვარად,

$$y_B = \sqrt{l^2 - u^2 t^2}. \quad (a)$$

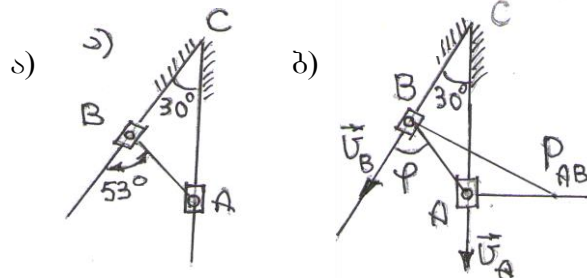
ეს არის B წერტილის მოძრაობის კანონი.

გრასჰოფის თეორემის თანახმად, გეგმ $_{AB}(\vec{v}_B) =$ გეგმ $_{AB}(\vec{v}_A) \Leftrightarrow v_B \sin \varphi = u \cos \varphi \Rightarrow$

$$v_B = u \operatorname{ctg} \varphi = u^2 t / \sqrt{l^2 - u^2 t^2}. \quad (b)$$



ნახ. 10.26



ნახ. 10.27

A და B წერტილებიდან სიქარეებსა და აღმართოთ მართობები. მათი გადაკვეთის P წერტილი იქნება AB მონაკვეთის სიქარეთა მყისი ცენტრი. მაშინ $v_A = AP \cdot \omega$, $\triangle APB$ -ში $AP = l \sin \varphi \Rightarrow \omega = v_A / AP = u / l \sin \varphi \Rightarrow$

$$\omega = u / \sqrt{l^2 - u^2 t^2}. \quad (c)$$

B წერტილი მოძრაობს წრფივად, ამიტომ

$$w_B = w_{By} = \frac{dv_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 t}{\sqrt{l^2 - u^2 t^2}} \right) = \frac{u^2 l^2}{(l^2 - u^2 t^2)^{3/2}}.$$

განსაზღვრის თანახმად,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{l^2 - u^2 t^2}} \right) = \frac{u^3 t}{(l^2 - u^2 t^2)^{3/2}}.$$

პასუხი. $y_B = \sqrt{l^2 - u^2 t^2}$, $v_B = u^2 t / \sqrt{l^2 - u^2 t^2}$, $w_B = u^2 l^2 / (l^2 - u^2 t^2)^{3/2}$,

$$\omega = u / \sqrt{l^2 - u^2 t^2}, \quad \varepsilon = u^3 t / (l^2 - u^2 t^2)^{3/2}.$$

ამოცანა 10.15. A ცოცია მოძრაობს ვერტიკალურად ქვევით მუდმივი $v_A = 90$ სმ/წმ სიქარით (ნახ. 10.27,ა). A ცოციას მოძრაობის მიმართულებასთან 30° -იანი კუთხით დახრილ ხაზზე მოძრაობს B ცოცია, რომელიც A ცოციასთან დაკავშირებულია $AB = 25$ სმ სიგრძის ღეროს საშუალებით. განსაზღვრეთ B ცოციას სიქარე და აჩქარება იმ მომენტში, როცა მისი მოძრაობის მიმართულება AB ღეროსთან ადგენს $\varphi = 53^\circ$ -იან კუთხეს.

ამოხსნა. ABD კუთხის სიდიდე აღვნიშნოთ φ -თი (ნახ. 10.27,ბ). A და B წერტილებიდან აღვმართოთ მართობები შესაბამისად CA და CB წრფეებისა, მაშინ მათი გადაკვეთის $P_{AB} = P$ წერტილი იქნება AB ღეროს სიქარეთა მყისი ცენტრი. ადვილად მივიღებთ, რომ $\angle ABP = 90^\circ - \varphi$, $\angle BAP = \varphi + 60^\circ$ და $\angle AOB = 30^\circ$. სინუსების თეორემის თანახმად, $\triangle ABP$ -დან გვაქვს:

$$\frac{AP}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{BP}{\sin(\varphi + 60^\circ)} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AP = 50 \cos \varphi, \quad BP = 50 \sin(\varphi + 60^\circ).$$

$$AB \text{ ღეროს კუთხური სიქარე აღვნიშნოთ } v_A = \omega \cdot AP \Rightarrow \omega = v_A / AP = 9/5 \cos \varphi$$

$$\Rightarrow v_B = \omega \cdot BP = \frac{9}{5 \cos \varphi} 50 \sin(\varphi + 60^\circ) = 45(\sqrt{3} + \operatorname{tg} \varphi).$$

B წერტილი მოძრაობს წრფივად, ამიტომ

$$w_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{d}{dt} (45(\sqrt{3} + \operatorname{tg} \varphi)) = 45 \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{45}{\cos^2 \varphi} \cdot \omega = \frac{45}{\cos^2 \varphi} \frac{9}{5 \cos \varphi} = \frac{81}{\cos^3 \varphi}.$$

როცა $\varphi = 53^\circ$, მაშინ $v_B = 45(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 53^\circ) \approx 45(1,732 + 1,327) = 45 \cdot 3,059 = 137,655 \approx 137,66$ სმ/წმ, $w_B = 81 / \cos^3 \varphi \approx 81 / (0,6018)^3 \approx 81 / 0,218 \approx 371,56$ სმ/წმ².

პასუხი. $v_B = 137,66$ სმ/წმ; $w_B = 371,56$ სმ/წმ².

XI თავი

მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო
(სფერული მოძრაობა)

11.1. თავისუფლების ხარისხი

ვაჩვენოთ, რომ თუ ვიცით სხეულის ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილის კოორდინატები, მაშინ შეგვიძლია განესაზღვროთ მისი ნებისმიერი მეოთხე წერტილის კოორდინატები, ე.ი. დროის მოცემულ მომენტში შეგვიძლია გავიგოთ სხეულის მდებარეობა. მართლაც, ვთქვათ, დროის რაიმე მომენტში ცნობილია $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ და $M_3(x_3, y_3, z_3)$ წერტილები. ავიღოთ ნებისმიერი მეოთხე $M(x, y, z)$ წერტილი და დავწეროთ ამ წერტილიდან ცნობილ წერტილებამდე მანძილების კვადრატების გამოსათვლელი ფორმულები:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = d_1^2, \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = d_2^2, \\ (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2 = d_3^2, \end{cases} \quad (11.1.1)$$

სადაც d_1, d_2, d_3 მანძილებია M წერტილიდან M_1, M_2, M_3 წერტილებამდე, რომელთა მნიშვნელობები ცნობილია. ამ სისტემიდან გავიგებთ x, y, z კოორდინატებს.

სამ წერტილს სივრცეში აქვს ცხრა კოორდინატი, რომლებმაც უნდა დააკმაყოფილონ მათ შორის მანძილების გამომსახველი სამი ტოლობა. აქედან გამომდინარეობს, რომ ცხრიდან მხოლოდ ექვსი კოორდინატია ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი.

მივიღეთ: სივრცეში აბსოლუტურად მყარი სხეულის მდებარეობის გასაგებად საკმარისია ექვსი ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი სიდიდე.

შენიშნა. თუ M_1, M_2 და M_3 წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, მაშინ ცხრა კოორდინატიდან შვიდი აღმოჩნდება ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი.

უძრავი წერტილის მქონე სხეულის შემთხვევაში, თუ ერთ-ერთ ცნობილ წერტილად ავიღებთ დამაგრების წერტილს, მაშინ ექვსიდან მხოლოდ სამი კოორდინატი და გვექნება ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი.

მივიღეთ: უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის დასახასიათებლად, საკმარისია სამი ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი სიდიდე.

ზემოთ (იხ. §10.1) იმ პარამეტრების (სიდიდეების) რიცხვს, რომლებიც დროის ყოველ მომენტში ცალსახად განსაზღვრავს მოძრავი ობიექტის მდებარეობას, ამ მოძრაობის **თავისუფლების ხარისხი** ვუწოდეთ.

მივიღეთ, რომ სივრცეში სხეულის მოძრაობის თავისუფლების ხარისხი არის ექვსი, ხოლო უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვის – სამი.

აღსანიშნავია, რომ სივრცეში თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის თავისუფლების ხარისხი არის სამი, სიბრტყეში მოძრაობის – ორი, წრფეზე მოძრაობის – ერთი, სხეულის გადატანითი მოძრაობის – სამი, უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის – ერთი, სხეულის ბრტყელი მოძრაობის – სამი.

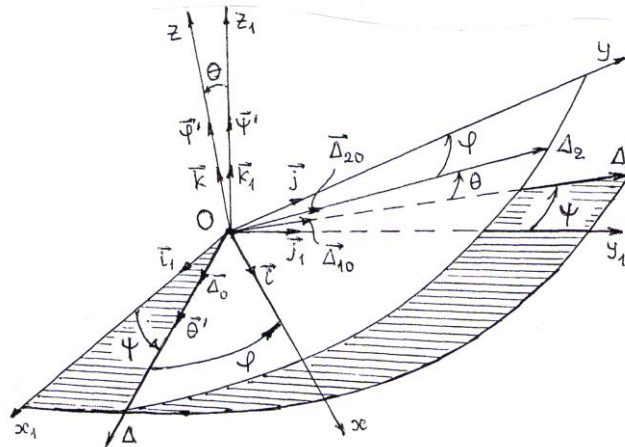
11.2. ეილერის კუთხეები. მყარი სხეულის უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვის განტოლებები

დაისმის კითხვა: რომელი სამი დამოუკიდებელი სიდიდე უნდა შევარჩიოთ უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვის დასახასიათებლად? ამ სიდიდეების

აღება შეიძლება ნებისმიერად, თუმცა თეორიულ მექანიკაში უპირატესობას ანიჭებენ ე.წ. **ეილერის კუთხეებს**. გავვცნოთ ამ კუთხეებს.

უძრავი $Ox_1y_1z_1$ კოორდინატთა სისტემის O სათავე დავამთხვიოთ სხეულის დამაგრების წერტილს და შევისწავლოთ სხეულის მოძრაობა ამ სისტემის მიმართ. სხეულთან მკვიდრად დავამაგროთ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 11.1). იმისათვის, რომ დროის ყოველ მომენტში ვიცოდეთ სხეულის მდებარეობა უძრავი $Ox_1y_1z_1$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, საკმარისია ვიცოდეთ მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მდებარეობა უძრავი სისტემის მიმართ.

დავუშვათ, რომ თავიდან $Oxyz$ სისტემა ემთხვევა $Ox_1y_1z_1$ სისტემას. ვაჩვენოთ, რომ სამი თანმიმდევრული მობრუნებით $Ox_1y_1z_1$ მდებარეობიდან შეგვიძლია გადავიდეთ ნახ. 11.1-ზე მოცემულ მდებარეობაში: 1) მოვაბრუნოთ Oxy სიბრტყე Oz_1 ღერძის გარშემო ψ კუთხით; მას ეწოდება **პრეცესიის კუთხე**, ხოლო Oz_1 ღერძს - **პრეცესიის ღერძი**. ψ კუთხე დადებითია, თუ Oz_1 ღერძის გარშემო მობრუნება ხდება საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით. Ox ღერძის ახალი მდებარეობა Ox_1y_1 სიბრტყეში აღვნიშნოთ $O\Delta$ -ით და ვუწოდოთ მას **ნუტაციის ღერძი** ან **კვანძების ხაზი**; 2) კოორდინატთა სისტემა $O\Delta$ ღერძის გარშემო მოვაბრუნოთ θ კუთხით; მას ეწოდება **ნუტაციის კუთხე**; 3) კოორდინატთა სისტემა მოვაბრუნოთ Oz ღერძის გარშემო φ კუთხით, რომელსაც **საკუთარი ბრუნვის კუთხე** ეწოდება და მივიღებთ $Oxyz$ სისტემის საბოლოო მდებარეობას. Oz ღერძს **საკუთარი ბრუნვის ღერძი** ეწოდება. θ და φ კუთხეების დადებითი მიმართულება ემთხვევა საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებას.



ნახ. 11.1

დავაზუსტოთ ეილერის კუთხეები: ψ კუთხე განსაზღვრავს $O\Delta$ კვანძების ხაზის მდებარეობას უძრავი Ox_1 ღერძის მიმართ, θ - Ox ღერძის მდებარეობას $O\Delta$ ღერძის მიმართ, ხოლო θ არის Ox_1y_1 და Oxy სიბრტყეებს შორის კუთხე.

ეილერის კუთხეებს დიდი გამოყენება აქვს გიროსკოპების თეორიაში. გიროსკოპი ეწოდება სიმეტრიულ სხეულს, რომელსაც აქვს უძრავი წერტილი და ძალიან სწრაფად ბრუნავს სიმეტრიის ღერძის გარშემო.

იმისათვის, რომ ვიცოდეთ უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვა, უნდა ვიცოდეთ სამივე ეილერის კუთხე, როგორც დროის ფუნქციები. ვთქვათ,

$$\psi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (11.2.1)$$

(11.2.1) განტოლებები წარმოადგენს უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვის განტოლებებს.

არსებობს სხვა სამი კუთხეც, რომელთა საშუალებით შეგვიძლია შევისწავლოთ უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვა. ასეთებია, მაგალითად, **ბრაინტის კუთხეები**, რომელთაც არ განვიხილავთ, თუმცა აღვნიშნავთ, რომ როგორც ერთ კუთხეებს, ისე მეორეს, აქვს გამოყენების თავისი დადებითი და უარყოფითი მხარეები.

11.3. კავშირი მიმართულების კოსინუსებსა და ეილერის კუთხეებს შორის. უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნვი სხეულის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები

Ox ღერძის მიერ Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 ღერძებთან შედგენილი კუთხეების კოსინუსები აღვნიშნოთ l_1, m_1, n_1 -ით (ნახ. 11.1), Oy ღერძის მიერ იმავე ღერძებთან შედგენილი კუთხეების კოსინუსები - l_2, m_2, n_2 -ით, ხოლო Oz ღერძის მიერ შედგენილი კუთხეების კოსინუსები - l_3, m_3, n_3 -ით (იხ. ცხრილი 11.1). ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ მიმართულების კოსინუსებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\begin{cases} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \end{cases} \quad (11.3.1)$$

$$\begin{cases} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0, \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \end{cases} \quad (11.3.2)$$

(11.3.1) გამოსახავს **ნორმირების**, ხოლო (11.3.2) - **ორთოგონალურობის** პირობას, რომელიც დაწერილია სვეტების მიხედვით. შეიძლება მსგავსი პირობების დაწერა სტრიქონების მიხედვითაც.

(11.3.1) და (11.3.2) ფორმულებიდან გამოდინარეობს, რომ ცხრა მიმართულების კოსინუსებიდან დამოუკიდებელია სამი, რაც ნიშნავს, რომ თუ ვიცით რომელიმე სამი კოსინუსი, მაშინ (11.3.1) და (11.3.2) ტოლობების საშუალებით გავიგებთ დანარჩენ ექვსსაც.

Ox_1y_1 სიბრტყეში O წერტილზე $O\Box$ კვანძების ხაზის მართობულად გავატაროთ $O\Box_1$ ღერძი ისე, რომ $O\Box$, $O\Box_1$ და Oz_1 ღერძებმა შეადგინოს მარჯვენა სისტემა (ნახ.

11.1). ასევე, Oxy სიბრტყეში O წერტილზე $O\Box$ ღერძის მართობულად გავატაროთ $O\Box_2$ ღერძი ისე, რომ $O\Box, O\Box_2$ და Oz ღერძებმა შეადგინოს მარჯვენა სისტემა. ადვილი მისახ-ვედრია, რომ $O\Box_1, O\Box_2, Oz_1$ და Oz ღერძები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ, ხოლო $O\Box$ და $O\Box_2$ ღერძებს შორის კუთხე უდრის θ -ს. აღვნიშნოთ Ox_1, Oy_1 და Oz_1 ღერძების ორტები $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ -ით, Ox, Oy და Oz ღერძების კი - $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - თი, ხოლო $O\Box, O\Box_1$ და $O\Box_2$ ღერძებისა - $\vec{\Delta}_0, \vec{\Delta}_{10}, \vec{\Delta}_{20}$ -ით. შევეცადოთ გამოვსახოთ კოორდინატთა ღერძების ორტები $\vec{\Delta}_0, \vec{\Delta}_{10}, \vec{\Delta}_{20}$ ორტების საშუალებით. ამისათვის $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ ორტები დავშალოთ $\vec{\Delta}_0, \vec{\Delta}_{10}, \vec{\Delta}_{20}$ ორტების მიმართულებების მიხედვით. ადვილად მივიღებთ:

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{\Delta}_0 \cos \varphi + \vec{\Delta}_{20} \sin \varphi, \\ \vec{j} = -\vec{\Delta}_0 \sin \varphi + \vec{\Delta}_{20} \cos \varphi, \\ \vec{k} = \vec{k}, \end{cases} \quad (11.3.3)$$

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = \vec{\Delta}_0 \cos \psi - \vec{\Delta}_{10} \sin \psi, \\ \vec{j}_1 = \vec{\Delta}_0 \sin \psi + \vec{\Delta}_{20} \cos \psi, \\ \vec{k}_1 = \vec{k} \cos \theta + \vec{\Delta}_{20} \sin \theta. \end{cases} \quad (11.3.4)$$

ცნობილია: ორტის კვადრატი უდრის 1-ს, ურთიერთმართობი ორტების სკალარული ნამრავლი - 0-ს, და თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{\Delta}_{10} \cdot \vec{\Delta}_{20} = \cos \theta$, გვექნება:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(Ox, Ox_1) = (\vec{i} \cdot \vec{i}_1) = (\vec{\Delta}_0 \cos \varphi + \vec{\Delta}_{20} \sin \varphi)(\vec{\Delta}_0 \cos \psi - \vec{\Delta}_{10} \sin \psi) = \\ &= \Delta_0^2 \cos \varphi \cos \psi - \vec{\Delta}_0 \cdot \vec{\Delta}_{10} \cos \varphi \sin \psi + \vec{\Delta}_{20} \cdot \vec{\Delta}_0 \sin \varphi \cos \psi - \\ &- \vec{\Delta}_{20} \cdot \vec{\Delta}_{10} \sin \varphi \sin \psi = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta. \end{aligned}$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ m_1 &= \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ n_1 &= \sin \varphi \sin \theta, \\ l_2 &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ m_2 &= \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ n_2 &= \cos \varphi \sin \theta, \\ l_3 &= \sin \psi \sin \theta, \\ m_3 &= -\cos \psi \sin \theta, \\ n_3 &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.3.5)$$

11.3.5) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ კოორდინატთა ღერძების ყველა მიმართულების კოსინუსი გამოისახება ეილერის კუთხეების საშუალებით.

გამოვიყვანოთ უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნვი სხეულის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები. განვიხილოთ სხეულის ნებისმიერი M წერტილი

(ნახ. 11.2). მისი კოორდინატები უძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ x_1, y_1, z_1 -ით, ხოლო მოძრავის მიმართ - x, y, z -ით. M წერტილის რადიუს-ვექტორის სათვის გვაქვს:

$$\vec{r} = \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z. \quad (11.3.6)$$

ამ გლობაში $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ მოძრავი ღერძების ორტეზია, ამიტომ ისინი დროის ფუნქციებია.

(11.3.6) არის უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნავი სხეულის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობის ვექტორული განტოლება.

დავაგეგმილოთ (11.3.6) უძრავ ღერძებზე და მივიღებთ უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნავი სხეულის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობის სკალარულ განტოლებებს:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 x + l_2 y + l_3 z, \\ y_1 = m_1 x + m_2 y + m_3 z, \\ z_1 = n_1 x + n_2 y + n_3 z. \end{cases} \quad (11.3.7)$$

მივიღეთ: თუ ვიცით უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნავი სხეულის (11.2.1) განტოლებები, მაშინ (11.3.5) ფორმულებით დროის ყოველ მოცემულ მომენტში გავიგებთ მოძრავი ღერძების მიმართულების კოსინუსებს, ხოლო (11.3.7) ფორმულებით - სხეულის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებს უძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

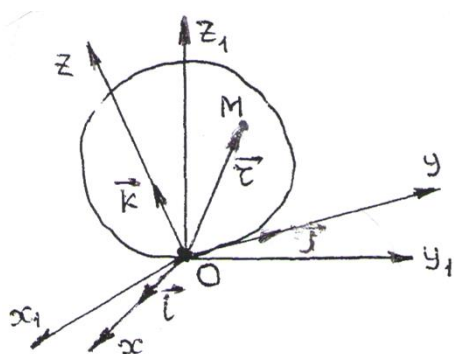
11.4. ეილერ-დალაშერის თეორემა. ბრუნვის მყისი ღერძი

თეორემა. უძრავი წერტილის მქონე სხეული ერთი მდებარეობიდან ნებისმიერ მეორე მდებარეობაში შეგვიძლია გადავიტანოთ უძრავ წერტილზე გამავალი განსაზღვრული ღერძის გარშემო მხოლოდ მობრუნებით.

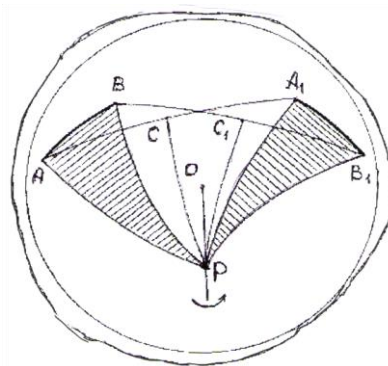
დამტკიცება. §11.1-ში ვაჩვენეთ, რომ სივრცეში სხეულის მდებარეობის განსაზღვრად საკმარისია ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილის ცოდნა. როცა სხეულს ერთი წერტილი აქვს დამაგრებული, მაშინ იმავე მიზნისთვის საკმარისია ორი წერტილის ცოდნა, რომლებზეც გამავალი წრფე არ უნდა გადიოდეს უძრავ წერტილზე. უძრავი წერტილი აღვნიშნოთ O ასოთი და მისგან, როგორც ცენტრიდან, შემოვხაზოთ ნებისმიერი რადიუსის სფერო და მასზე ავიღოთ ორი A და B წერტილი (ნახ. 11.4). დავუშვათ, რომ სფერო სხეულთან მკვიდრად არის დაკავშირებული, ე.ი. მოძრაობს მასთან ერთად. მაშინ სხეულის მდებარეობა სრულად განისაზღვრება დიდი წრის AB რკალით.

ვთქვათ, სხეული გადაადგილდა ისე, რომ AB რკალმა დაიკავა A_1B_1 მდებარეობა. დიდი წრის რკალებით A წერტილი შევაერთოთ A_1 -თან და B წერტილი B_1 -თან. მათი შუა C და C_1 წერტილებიდან აღვმართოთ სფერული მართობები და მათი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ P ასოთი. ვაჩვენეთ, რომ APB და A_1PB_1 სფერული სამკუთხედები ტოლია. სხეული აბსოლუტურად მყარია, ამიტომ $AB = A_1B_1$ რკალები ტოლია. მართკუთხა სფერული APC და A_1PC სამკუთხედები ტოლია, ვინაიდან

$AC = A_1C$ და CP საერთო აქვთ. აქედან $AP = A_1P$. ასევე სფერული BC_1P და B_1C_1P სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $BP = B_1P$. მივიღეთ, რომ APB და A_1PB_1 სამკუთხედებს ტოლი აქვს სამივე გვერდი, ამიტომ ეს სამკუთხედები ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\angle APB = \angle A_1PB_1$. ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ ერთი და იგივე BPA_1 კუთხე, მივიღებთ: $\angle APA_1 = \angle BPB_1$. O და P წერტილებზე გავატაროთ OP ღერძი და შემოვაბრუნოთ სხეული მის გარშემო APA_1 კუთხით. ბოლო ტოლობის თანახმად, APB სამკუთხედი დაემთხვევა A_1PB_1 სამკუთხედს, რაც იმას ნიშნავს, რომ AB რკალი დაემთხვევა A_1B_1 რკალს. მივიღეთ, რომ ამ რკალების ერთმანეთზე დამთხვევა მოხდა სხეულის მხოლოდ OP ღერძის გარშემო შემობრუნების შედეგად. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 11.2



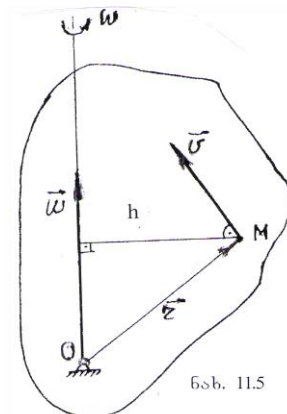
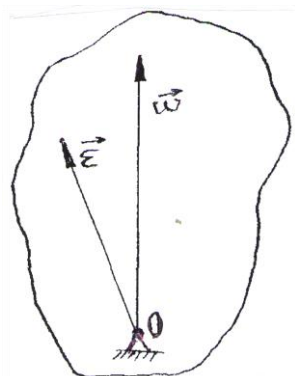
ნახ. 11.3

OP ღერძს, რომლის გარშემო მხოლოდ შემობრუნებით სხეული ერთი მდებარეობიდან გადადის მეორეში, ბრუნვის მყისი ღერძი ეწოდება.

დამტკიცებულ თეორემას ეილერ-დალამბერის თეორემა ეწოდება.

11.5. მყისი კუთხური სიჩქარე და მყისი კუთხური აჩქარება

მივიღეთ, რომ უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მოძრაობა დროის ყოველ მომენტში შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც შემობრუნება ბრუნვის მყისი ღერძის გარშემო. შემოვიტანოთ უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნვი სხეულის მყისი კუთხური სიჩქარისა და მყისი კუთხური აჩქარების ცნებები.



ნახ. 11.5

დავაკავშიროთ სხეულთან მკვიდრად რაიმე სიბრტყე და დავუშვათ, რომ დროის t მომენტში იგი გადის ბრუნვის მყის ღერძზე. ვთქვათ, Δt დროის უსასრულო მცირე შუალედში სიბრტყემ შეიცვალა მდებარეობა $\Delta \phi$ უსასრულოდ მცირე კუთხით. გამოვთვალოთ

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \phi|}{\Delta t}. \quad (11.5.1)$$

განსაზღვრა. $\vec{\omega}$ ვექტორს, რომლის მოდული გამოითვლება (11.5.1) ფორმულით და დროის ყოველ მომენტში მიმართულია ბრუნვის მყისი ღერძის გასწვრივ ისე, რომ მის გარშემო ბრუნვა ხდება საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, **მყისი კუთხური სიჩქარე** ეწოდება. $\vec{\omega}$ ვექტორი შეგვიძლია მოვდოთ მყისი ღერძის ნებისმიერ წერტილში.

განსაზღვრა. მყისი კუთხური აჩქარება ეწოდება

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (11.5.2)$$

ვექტორს. $\vec{\omega}$ ვექტორს დროის მიხედვით შეიძლება შეეცვალოს როგორც სიდიდე, ისე მიმართულება, ამიტომ $\vec{\varepsilon}$ ვექტორი, საზოგადოდ, არ არის მიმართული მყისი ღერძის გასწვრივ. მის მიმართულებას განსაზღვრავს (11.5.2) ტოლობა. $\vec{\varepsilon}$ ვექტორი, $\vec{\omega}$ -ს მსგავსად, შეგვიძლია მოვდოთ მყისი ღერძის ნებისმიერ წერტილში. შევთანხმდეთ და შემდეგში ისინი მოვდოთ O უძრავ წერტილში (ნახ. 11.6).

11.6. უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნვის სხეულის წერტილების სიჩქარეები. პუასონის ფორმულები

სხეულის უმარტივესი სახის მოძრაობების შესწავლისას უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის შემთხვევაში სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის გასაგებად გამოვიყენებთ ეილერის ფორმულას. ამ ფორმულის მიხედვით, წერტილის სიჩქარე რომ გავიგოთ, უნდა ვიცოდეთ სხეულის კუთხური სიჩქარე და ბრუნვის ღერძის მიმართ ამ წერტილის მდებარეობა.

ეილერ-დალამბერის თეორემა საშუალებას გვაძლევს უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მოძრაობა დროის ყოველ მომენტში განვიხილოთ როგორც ბრუნვა მყისი ღერძის გარშემო $\vec{\omega}$ მყისი სიჩქარით, რომელიც ყოველთვის გადის უძრავ წერტილზე და მიმართულია ბრუნვის მყისი ღერძის გასწვრივ. ბრუნვის მყისი ღერძზე მდებარე სხეულის წერტილების სიჩქარეები ნულის ტოლია, ამიტომ სხეულის წერტილების სიჩქარეების გამოსათვლელად ეილერის ფორმულები შეგვიძლია გამოვიყენოთ უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვის შემთხვევაშიც.

სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე აღვნიშნოთ $\vec{v}$ -თი, რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ - $\vec{r}$ -ით (ნახ. 11.5), კუთხური სიჩქარე - $\vec{\omega}$ -თი, მაშინ

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \quad (11.6.1)$$

$v = r\omega \sin(\vec{\omega}, \vec{r})$, მაგრამ $r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = h$, ამიტომ

$$v = \omega h. \quad (11.6.2)$$

მივიღეთ: სხეულის წერტილის სიჩქარე პროპორციულია წერტილიდან ბრუნვის მყის ღერძამდე h მანძილისა.

$$(11.6.2) \text{ ფორმულიდან } \omega = v/h. \quad (11.6.3)$$

(11.6.3)-დან გამომდინარეობს: სხეულის კუთხური სიჩქარის გასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ ერთი რომელიმე წერტილის სიჩქარე და ამ წერტილიდან ბრუნვის მყის ღერძამდე მანძილი.

$\vec{v}$, $\vec{\omega}$ და $\vec{r}$ ვექტორების გეგმილები უძრავ ღერძებზე შესაბამისად აღვნიშნოთ $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}, \omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}, x_1, y_1, z_1$ -ით, ხოლო მოძრავ ღერძებზე - $v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, x, y, z$ -ით. მაშინ უძრავ ღერძებზე (11.6.1) ტოლობის დაგეგმილებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} v_{x_1} = \omega_{x_1} \cdot z_1 - \omega_{z_1} \cdot y_1, \\ v_{y_1} = \omega_{z_1} \cdot x_1 - \omega_{x_1} \cdot z_1, \\ v_{z_1} = \omega_{x_1} \cdot y_1 - \omega_{y_1} \cdot x_1, \end{cases} \quad (11.6.4)$$

ხოლო მოძრავ ღერძებზე დაგეგმილებით

$$\begin{cases} v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y, \\ v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z, \\ v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{cases} \quad (11.6.5)$$

განსახდურის თანახმად, წერტილის სიჩქარე არის მისი რადიუს-ვექტორის წარმოებული დროით. მეორე მხრივ, უძრავი წერტილის მქონე სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე გამოითვლება (11.6.1) ფორმულით. ამგვარად,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (11.6.6)$$

(11.6.6) ტოლობაში $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი ერთმანეთთან აერთებს აბსოლუტურად მყარი სხეულის ორ წერტილს, ამიტომ $|\vec{r}| = \text{const}$. აქედან გამომდინარეობს: (11.6.6) ტოლობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც გამოსათვლელი ფორმულა ისეთი ვექტორის წარმოებულისა დროით, რომელსაც მუდმივი სიგრძე აქვს და მისი ცვლილება გამოწვეულია მხოლოდ იმით, რომ იგი სხეულთან ერთად უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნავს $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით.

მოძრავი $Oxyz$ კოორდინატთა ღერძების $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ორტები ერთეულოვანი ვექტორებია და მათი ცვლილება ხდება მხოლოდ იმიტომ, რომ ისინი მოძრავ სისტემასთან ერთად ბრუნავენ უძრავი წერტილის გარშემო $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით, ამიტომ (11.6.6) ფორმულის თანახმად

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}.. \quad (11.6.7)$$

ამ ფორმულებს პუასონის ფორმულები ეწოდება.

11.7. მყისი კუთხური სიჩქარის გეგმილების გამოსახვა ვილერის კუთხეებით

§11.2-ში ვაჩვენეთ, რომ უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას სხეულის ერთი მდებარეობიდან მეორე მდებარეობაში გადასვლა შეიძლება განვახორციელოთ სამი თანმიმდევრული მობრუნებით: 1) Oz_1 ღერძის გარშემო ψ კუთხით; 2) Ox_1 ღერძის გარშემო θ კუთხით და 3) Oz ღერძის გარშემო ϕ კუთხით, რომელთა შესაბამისი კუთხური სიჩქარეები აღვნიშნოთ $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ და $\dot{\phi}$ -ით. დავაზუსტოთ: $\vec{\omega}_1 = \dot{\psi} \vec{n}_3$, $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta} \vec{e}_1$ და $\vec{\omega}_3 = \dot{\phi} \vec{e}_3$, სადაც ψ, θ, ϕ ვილერის კუთხეებია, რომლებიც (11.2.1) ფორმულებით განისაზღვრება (წერტილი ნიშნავს დროით გაწარმოებას). რასაკვირველია, $\vec{\omega}_1$ ემთხვევა Oz_1 ღერძს, $\vec{\omega}_2$ კი - Ox_1 ღერძს, ხოლო $\vec{\omega}_3$ - Oz ღერძს.

ცხადია, ბრუნვის $\vec{\omega}$ მყისი კუთხური სიჩქარე

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{n}_3 + \dot{\theta} \vec{e}_1 + \dot{\phi} \vec{e}_3. \quad (11.7.1)$$

ეს ტოლობა დავაგეგმილოთ უძრავ ღერძებზე, მივიღებთ (ნახ. 7.1):

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} l_3, \\ \omega_y = \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} m_3, \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} n_3. \end{cases}$$

(11.3.5) ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} \omega_{x_1} = \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y_1} = -\dot{\phi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z_1} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad (11.7.2)$$

ანალოგიურად მივიღებთ მოძრავ ღერძებზე $\vec{\omega}$ ვექტორის გეგმილების გამოსათვლელ ფორმულებს:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta}, \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{cases} \quad (11.7.3)$$

(11.7.2) ან (11.7.3) ტოლობების კვადრატში აყვანითა და შემდეგ შეკრებით, მივიღებთ:

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta. \quad (11.7.4)$$

11.8. ბრუნვის მყისი ღერძის განტოლებები

პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად ბრუნვის მყისი ღერძის მდებარეობას ვპოულობთ წმინდა მექანიკური მოსაზრებებით. მაგალითად: დროის მოცემულ მომენტში მყისი ღერძი ყოველთვის გადის ორ უძრავ წერტილზე; თუ სხეული ეხება უძრავ სხეულს რაიმე წერტილში და ადგილი არა აქვს სრიალს, მაშინ ბრუნვის მყისი ღერძი

დი მოცემულ მომენტში გადის უძრავ წერტილზე; თუ ერთი კონუსი უსრიალოდ გორავს მეორე უძრავ კონუსზე, მაშინ საერთო მსახველი არის ბრუნვის მყისი ღერძი და ა.შ.

ბრუნვის მყისი ღერძის განტოლებების დასადგენად გავითვალისწინოთ, რომ ამ ღერძის წერტილების სიჩქარეები ნულის ტოლია და, თუ (11.6.4) ფორმულებში დავუშვებთ, რომ $v_{x_1} = v_{y_1} = v_{z_1} = 0$ მივიღებთ:

$$\omega_{y_1} \cdot z_1 - \omega_{z_1} \cdot y_1 = 0, \quad \omega_{z_1} \cdot x_1 - \omega_{x_1} \cdot z_1 = 0, \quad \omega_{x_1} \cdot y_1 - \omega_{y_1} \cdot x_1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}} \quad (11.8.1)$$

(11.8.1) არის ბრუნვის მყისი ღერძის განტოლებები უძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ანალოგიურ ფორმულებს მივიღებთ (11.6.4) ფორმულებიდან მოძრავი სისტემის მიმართ:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} . \quad (11.8.2)$$

11.9. უძრავი წერტილის მქონე სხეულის წერტილების აჩქარება

მყისი კუთხური სიჩქარისა და მყისი კუთხური აჩქარების შესწავლისას (§11.5) ვნახეთ, რომ მყისი აჩქარება, საზოგადოდ, არ არის მიმართული ბრუნვის მყისი ღერძის გასწვრივ. ამიტომ, მყისი კუთხური სიჩქარისაგან განსხვავებით, აჩქარების გასაგებად ვერ გამოვიყენებთ უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილების აჩქარების განმსაზღვრელ ფორმულებს.

უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნავი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის აჩქარების გასაგებად (11.6.1) ფორმულით განსაზღვრული $\vec{v}$ სიჩქარე უნდა გავაწარმოოთ დროით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad \Leftrightarrow \\ \vec{w} &= (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}). \end{aligned} \quad (11.9.1)$$

ამ ფორმულას **რივალის ფორმულა** ეწოდება.

$(\vec{\varepsilon} \times \vec{r})$ შემდგენს ვეწოდოთ **ბრუნვითი აჩქარება** და თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{w}_{ბრ}$ -თი, გვექნება:

$$\vec{w}_{ბრ} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}). \quad (11.9.2)$$

$(\vec{\omega} \times \vec{v})$ შემდგენს ვეწოდოთ **ღერძისკენული აჩქარება** და თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{w}_{ღერ}$ -თი, გვექნება:

$$\vec{w}_{ღერ} = (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (11.9.3)$$

მყისი კუთხური აჩქარებისთვის მივიღეთ:

$$\vec{w} = \vec{w}_{ბრ} + \vec{w}_{ღერ}. \quad (11.9.4)$$

მივიღეთ: უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება უღრის ბრუნვითი და ღერძისკენული აჩქარებების გეომეტრიულ ჯამს.

(11.9.4) ტოლობიდან გვაქვს:

$$w = \sqrt{w_{\text{ბრ}}^2 + w_{\text{ღერ}}^2 + 2w_{\text{ბრ}}w_{\text{ღერ}}\cos(\vec{w}_{\text{ბრ}} \wedge \vec{w}_{\text{ღერ}})}. \quad (11.9.5)$$

შევისწავლოთ ცალ-ცალკე ბრუნვითი და ღერძისკენული აჩქარებები.

ბრუნვითი აჩქარებისათვის (11.9.2) ტოლობიდან მივიღებთ (ნახ. 11.6):

$$w_{\text{ბრ}} = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon \cdot r \sin(\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}) = \varepsilon \cdot h_1, \quad (11.9.6)$$

სადაც $h_1 = r \sin(\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r})$ მანძილია M წერტილიდან $\vec{\varepsilon}$ ვექტორის ფუძემდე.

ღერძისკენული აჩქარებისთვის (11.9.3)-დან მივიღებთ: $w_{\text{ღერ}} = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{v})$.

მაგრამ $(\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = 90^\circ$ და $v = \omega h$ (იხ. (11.6.2) ფორმულა და ნახ. 11.6), მაშინ

$$w_{\text{ღერ}} = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h. \quad (11.9.7)$$

ცხადია, $\vec{w}_{\text{ღერ}}$ ვექტორი მიმართულია $\vec{\omega}$ და $\vec{v}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად.

(11.9.1) ვექტორული ტოლობა დავაგეგმილთ მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$w_x = \varepsilon_y \cdot z - \varepsilon_z \cdot y + \omega_y \cdot v_z - \omega_z \cdot v_y,$$

$$w_y = \varepsilon_z \cdot x - \varepsilon_x \cdot z + \omega_z \cdot v_x - \omega_x \cdot v_z,$$

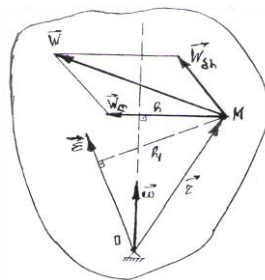
$$w_z = \varepsilon_x \cdot y - \varepsilon_y \cdot x + \omega_x \cdot v_y - \omega_y \cdot v_x.$$

ვაჩვენოთ, რომ უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვა წარმოადგენს უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვის კერძო შემთხვევას. მართლაც, უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის დროს $\vec{\omega}$ და $\vec{\varepsilon}$ ვექტორები ერთ ღერძზე მდებარეობენ, ე.ი. $h = h_1$, ამიტომ ბრუნვითი აჩქარება გადაიქცევა მხებ, ხოლო ღერძისკენული – ნორმალურ (იგივე ცენტრისკენულ) აჩქარებად.

გარდავექმნათ $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ ნამრავლი. (11.6.1) ფორმულის თანახმად, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, ამიტომ $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. ორმაგი ვექტორული ნამრავლისათვის მათემატიკიდან ცნობილია შემდეგი ფორმულა: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$. ამ ფორმულის მიხედვით $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}$ და თუ ამ შედეგს გავითვალისწინებთ (11.9.1) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}. \quad (11.9.8)$$

(11.9.8) ფორმულა გამოსახავს უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას სხეულის წერტილების აჩქარებათა განაწილების კანონს.



(11.9.8) ტოლობის დაგეგმილებით კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას სხეულის წერტილის აჩქარების გეგმილებს როგორც უძრავ, ისე მოძრავ ღერძებზე.

11.10. კუთხური აჩქარების განსაზღვრა

(11.9.8) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ უძრავი წერტილის მქონე სხეულის წერტილების აჩქარების გასაგებად აუცილებლად უნდა ვიცოდეთ სხეულის $\vec{\varepsilon}$ კუთხური აჩქარება. არსებობს მისი განსაზღვრის ორი ძირითადი ხერხი.

1. დავუშვათ, რომ ვიცით $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარის $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ გეგმილები უძრავ ან მოძრავ ღერძებზე. ამ შემთხვევაში იმავე ღერძებზე $\vec{\varepsilon}$ კუთხური აჩქარების გეგმილებს გავიგებთ

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \quad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} \quad (11.10.1)$$

ფორმულებით. კარგადაა ცნობილი გეგმილების საშუალებით ვექტორის მოდულისა და კოორდინატთა ღერძებთან მის მიერ შედგენილი კუთხეების განსაზღვრის ფორმულები.

2. $\vec{\omega}_0$ -ით აღვნიშნოთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომელსაც აქვს $\vec{\omega}$ ვექტორის მიმართულება, მაშინ $\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}_0 \Rightarrow$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega \vec{\omega}_0)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + \omega \frac{d\vec{\omega}_0}{dt}. \quad (11.10.2)$$

როგორც ვხედავთ, $\vec{\varepsilon}$ კუთხური აჩქარება დავშალეთ ორ შემდგენად.

$\frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0$ შემდგენი მდებარეობს $\vec{\omega}$ ვექტორის ფუძეზე და აქვს მისი მიმართულება,

როცა $\frac{d\omega}{dt} > 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას საპირისპირო მიმართულება აქვს.

$\omega \frac{d\vec{\omega}_0}{dt}$ შემდგენი მდებარეობს $\vec{\omega}$ ვექტორის მართობ სიბრტყეში ($\vec{\omega}_0$ მუდმივ-სიგრძიანი ვექტორია, რომლის გაწარმოებით ვღებულობთ მის მართობ ვექტორს (§8.6)).

ამ შემდგენების განსაზღვრის შემდეგ, $\vec{\varepsilon}$ კუთხურ აჩქარებას გავიგებთ მათი გეომეტრიული შეკრებით.

ამოცანა 11.1. განსაზღვრეთ სხეულის სფერული მოძრაობის კუთხური სიჩქარის მოდული, თუ მისი მოძრაობის კანონი მოცემულია განტოლებებით: $\psi = \pi \sin t$, $\theta = \pi \cos t$, $\varphi = \pi$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (11.7.4) ფორმულა: $\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta$. ჩვენ შემთხვევაში $\dot{\psi} = \pi \cos t$, $\dot{\phi} = 0$, $\dot{\theta} = -\pi \sin t$, ამიტომ $\omega^2 = \pi^2 \cos^2 t + (-\pi \sin t)^2 = \pi^2 \Rightarrow \omega = \pi$ რად/წმ.

პასუხი. π რად/წმ.

ამოცანა 11.2. განსაზღვრეთ სხეულის სფერული მოძრაობის კუთხური სიჩქარის მოდული, თუ მისი მოძრაობის კანონი მოცემულია განტოლებებით: $\psi = \pi t$, $\theta = \pi/3$, $\phi = \pi t$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (11.7.4) ფორმულა (იხ. წინა ამოცანა). ჩვენ შემთხვევაში $\dot{\psi} = \pi$, $\dot{\phi} = \pi$, $\dot{\theta} = 0$, ამიტომ $\omega^2 = 2\pi^2 + 2\pi^2 \cos 60^\circ = 3\pi^2 \Rightarrow \omega = \pi\sqrt{3}$ რად/წმ.

პასუხი. $\pi\sqrt{3}$ რად/წმ.

ამოცანა 11.3. სხეულის სფერული მოძრაობისას მისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega} = \pi \sin \pi t \cdot \vec{i} + \pi \cos \pi t \cdot \vec{j} + \pi \vec{k}$. დროის $t=1$ წმ მომენტში განსაზღვრეთ კუთხური აჩქარების გვერდითი Ox ღერძზე.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, $\omega_x = \pi \sin \pi t \Rightarrow \varepsilon_x = \dot{\omega}_x = \pi^2 \cos \pi t$. როცა $t=1$ წმ, მაშინ $\varepsilon_x = \pi^2 \cos \pi = -\pi^2 \approx -9,87$ რად/წმ².

პასუხი. $-9,87$ რად/წმ².

ამოცანა 11.4. სხეულის სფერული მოძრაობისას მისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega} = 2\sin^2 t \cdot \vec{i} + \sin 2t \cdot \vec{j} + 5\vec{k}$ (რად/წმ). დროის $t=2$ წმ მომენტში განსაზღვრეთ კუთხური აჩქარება.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, $\omega_x = 2\sin^2 t$, $\omega_y = \sin 2t$, $\omega_z = 5 \Rightarrow \varepsilon_x = \dot{\omega}_x = 2\sin 2t$, $\varepsilon_y = \dot{\omega}_y = 2\cos 2t$, $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = 0 \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2$ რად/წმ².

პასუხი. 2 რად/წმ².

ამოცანა 11.5. დროის რაღაც მომენტში სხეულის სფერული მოძრაობისას მისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. ამ მომენტში განსაზღვრეთ სხეულის იმ წერტილის სიჩქარე, რომლის კოორდინატებია: $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0,5$ მ.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (11.6.4) ფორმულები:

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} \cdot z_1 - \omega_{z_1} \cdot y_1, \quad v_{y_1} = \omega_{z_1} \cdot x_1 - \omega_{x_1} \cdot z_1, \quad v_{z_1} = \omega_{x_1} \cdot y_1 - \omega_{y_1} \cdot x_1.$$

პირობის თანახმად, $\omega_{x_1}=2$, $\omega_{y_1}=3$, $\omega_{z_1}=5$, ამიტომ $v_{x_1}=3 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0 = 1,5$; $v_{y_1}=5 \cdot 0 - 2 \cdot 0,5 = -1$; $v_{z_1}=2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2} = \sqrt{1,5^2 + (-1)^2} = \sqrt{3,25} \approx 1,80$ მ/წმ.

პასუხი. $1,80$ მ/წმ.

ამოცანა 11.6. დროის რაღაც მომენტში სხეულის სფერული მოძრაობისას მისი კუთხური აჩქარება $\vec{\varepsilon} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. განსაზღვრეთ სხეულის იმ წერტილის ბრუნვითი აჩქარება, რომლის რადიუს-ვექტორი ამ მომენტში $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

ამოხსნა. (11.9.2) ფორმულის თანახმად, $\vec{\omega}^{\text{ბრ}} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) \Rightarrow$

$$w_x^{\text{ბრ}} = \varepsilon_y \cdot z - \varepsilon_z \cdot y, \quad w_y^{\text{ბრ}} = \varepsilon_z \cdot x - \varepsilon_x \cdot z, \quad w_z^{\text{ბრ}} = \varepsilon_x \cdot y - \varepsilon_y \cdot x.$$

პირობის თანახმად, $\varepsilon_x=1, \varepsilon_y=-1, \varepsilon_z=1, x=1, y=1, z=1$, ამიტომ $w_x^{\text{ბრ}} = -1 \cdot 1 -$
 $-1 \cdot 1 = -2, \quad w_y^{\text{ბრ}} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0, \quad w_z^{\text{ბრ}} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \Rightarrow w^{\text{ბრ}} = \sqrt{(w_x^{\text{ბრ}})^2 + (w_y^{\text{ბრ}})^2 + (w_z^{\text{ბრ}})^2} =$
 $= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2,87 \text{ მ/წმ}^2.$

პასუხი. 2,87 მ/წმ².

ამოცანა 11.7. დროის რაღაც მომენტში სხეულის სფერული მოძრაობისას მისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. განსაზღვრეთ სხეულის იმ წერტილის ღერძისკენული აჩქარების გეგმილი Oy ღერძზე, რომლის სიჩქარე ამ მომენტში $\vec{v} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$.

ამოხსნა. (11.9.3) ფორმულის თანახმად, $\vec{w}^{\text{ღრ}} = (\vec{\omega} \times \vec{v}) \Rightarrow w_y^{\text{ღრ}} = \omega_z \cdot v_x - \omega_x \cdot v_z.$

პირობის თანახმად, $\omega_x=2, \omega_z=2, v_x=4, v_z=-4$, ამიტომ $w_y^{\text{ღრ}} = 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) = 16 \text{ მ/წმ}^2.$

პასუხი. 16 მ/წმ².

XII თავი

თავისუფალი მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა

12.1. თავისუფალი მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის

განტოლებები. შალის თეორემა

დროის განსაზღვრულ მომენტში ნებისმიერი ნივთიერი სხეულის კინემატიკური მდგომარეობა განისაზღვრება სივრცეში მისი წერტილების მდებარეობით და ამ მომენტში მათი სიჩქარეებით. სხეულის მოძრაობას ჩვენ განვიხილავთ, როგორც უწყვეტ და თანმიმდევრულ გადასვლას ერთი კინემატიკური მდგომარეობიდან მეორეში. მოძრაობისას სხეულის წერტილების მდებარეობის გაგებასთან ერთად დგება დამოუკიდებელი საკითხი დროის მოცემულ მომენტში წერტილების სიჩქარეების განაწილებისა.

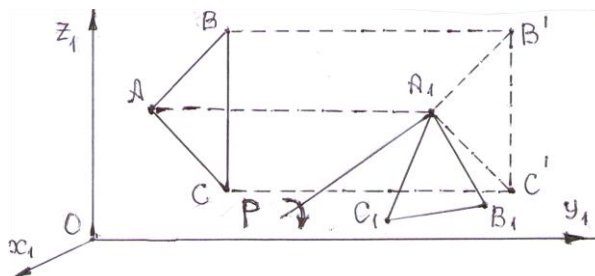
წინა თავებში გავეცანით მყარი სხეულის მოძრაობის კერძო შემთხვევებს (უძრავი მოძრაობებს: გადატანით და ბრუნვას უძრავი ღერძის გარშემო; ბრტყელ მოძრაობას; უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვას). ახლა შევისწავლოთ თავისუფალი სხეულის წერტილების სიჩქარეთა განაწილების კანონი დროის განსაზღვრულ მომენტში (მყისი სიჩქარეები) ყველაზე ზოგად შემთხვევაში.

ზოგადად, სხეულის **მყისი (მყისიერი) მოძრაობის** ქვეშ ვგულისხმობთ დროის მოცემულ მომენტში მოძრავი სხეულის წერტილების მხოლოდ სიჩქარეთა განაწილებას. მაგალითად, **სხეულის მყისი გადატანითი მოძრაობა** ისეთ მოძრაობას ეწოდება, რომლის დროსაც მისი წერტილების სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში, ერთმანეთის ტოლია, თუმცა ამ წერტილებს სხვადასხვა ტრაექტორიები და სხვადასხვა აჩქარებები შეიძლება ჰქონდეთ. ასევე, თუ მყარი სხეულის წერტილების სიჩქარე

რეები გამოითვლება ეილერის ფორმულით (იხ. (9.5.2) ფორმულა)), მაშინ ჩვენ ვლ-
პარაკობთ მყისი ღერძის გარშემო მყისი კუთხური სიჩქარით **სხეულის მყის ბრუნვით**
მოძრაობაზე. ამ შემთხვევაშიც წერტილების ტრაექტორიებსა და აჩქარებებს
შეიძლება ჰქონდთ ნებისმიერი მნიშვნელობები.

დავამტკიცოთ თეორემა, რომელსაც სივრცეში სხეულის მოძრაობისთვის იგივე
მნიშვნელობა აქვს, რაც ეილერ-დალამბერის თეორემას უძრავი წერტილის მქონე
სხეულის მოძრაობისთვის. ამ თეორემას **შალის თეორემა** ეწოდება.

თეორემა. თავისუფალი მყარი სხეულის ყოველი გაგაადგილება ერთი მდებარეობიდან მეორე მდებარეობაში შეიძლება განხორციელდეს ნებისმიერად არჩეულ პოლუსთან ერთად გადატანითი მოძრაობისა და ამ პოლუსზე გამავალი გარკვეული ღერძის გარშემო მობრუნების საშუალებით.



ნახ. 12.1

დამტკიცება. ვთქვათ, სხეულის ერთ წრფეზე არამდებარე ნებისმიერმა სამმა A, B, C წერტილმა სხეულის გაგაადგილების შედეგად დაიკავა A_1, B_1, C_1 მდებარეობები (ნახ. 12.1). ვაჩვენოთ, რომ სხეული პირველი მდებარეობიდან მეორეში შეიძლება გადავიდეს გადატანითი მოძრაობისა და მობრუნების საშუალებით. A წერტილი მივიღოთ პოლუსად და სხეული ისე ვამოძრაოთ, რომ A წერტილი დაემთხვეს A_1 წერტილს. მაშინ ABC სამკუთხედი დაიკავებს $A_1B_1C_1$ მდებარეობას. ცხადია, $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1A_1 = CA$. ეილერ-დალამბერის თეორემის თანახმად, A_1 წერტილზე გამავალი გარკვეული A_1P ღერძის გარშემო სხეულის მობრუნებით, B_1 წერტილი შეგვიძლია დავამთხვიოთ B_1 წერტილს, ხოლო C_1 წერტილი - C_1 წერტილს. თეორემა დამტკიცებულია.

მივიღეთ: თავისუფალი მყარი სხეულის მოძრაობის შესასწავლად შეგვიძლია ცალკე შევისწავლოთ მისი გადატანითი მოძრაობა და ცალკე ბრუნვა პოლუსის გარშემო. როგორც ვიცით, გადატანითი მოძრაობა ხასიათდება მისი რომელიმე ერთი წერტილის მოძრაობით ან რაც იგივეა, ამ წერტილის სამი კოორდინატით, ხოლო წერტილის გარშემო ბრუნვა - სამი კუთხით. ამგვარად, მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის შესასწავლად უნდა ვიცოდეთ ექვსი სიდიდე, კერძოდ: პოლუსის კოორდინატები და ეილერის კუთხეები. A პოლუსის კოორდინატები უძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ x_A, y_A, z_A -თი, ხოლო ეილერის კუთხეებისათვის შევი-

ნარჩუნოთ წინა თავში მიღებული აღნიშვნები. ვთქვათ, ცნობილია

$$\begin{cases} x_A = f_1(t), & y_A = f_2(t), & z_A = f_3(t), \\ \psi = f_4(t), & \varphi = f_5(t), & \theta = f_6(t). \end{cases} \quad (12.1.1)$$

(12.1.1)-ს თავისუფალი მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები ეწოდება.

სხეულთან მკვიდრად დავაკავშიროთ $Axyz$ კოორდინატთა სისტემა და განვიხილოთ სხეულის ნებისმიერი M წერტილი (ნახ. 12.2). M წერტილი შევაერთოთ O და A წერტილებთან $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$ და $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$ ვექტორებით, ხოლო A წერტილი O -სთან - $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ ვექტორით. ნახ. 12.2-დან ვღებულობთ:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}. \quad (12.1.2)$$

მოძრავი დერძების ორტები აღვნიშნოთ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -თი, მაშინ $\vec{r}$ ასე ჩაიწერება:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

სადაც x, y, z არის M წერტილის კოორდინატები მოძრავი სისტემის მიმართ.

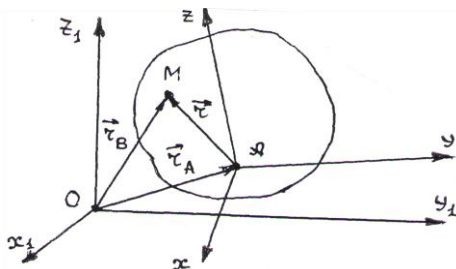
შევიტანოთ $\vec{r}$ -ის გამოსახულება (12.1.2) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (12.1.3)$$

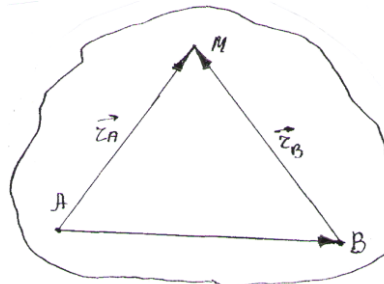
M და A წერტილების კოორდინატები უძრავი $Ox_1y_1z_1$ სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ შესაბამისად, x_1, y_1, z_1 და x_A, y_A, z_A -თი. დავაგეგმილოთ (12.1.3) ტოლობა უძრავ დერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1 = x_A + l_1 x + l_2 y + l_3 z, \\ y_1 = y_A + m_1 x + m_2 y + m_3 z, \\ z_1 = z_A + n_1 x + n_2 y + n_3 z. \end{cases} \quad (12.1.4)$$

(12.1.4) განტოლებებს თავისუფალი მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები ეწოდება. ამ განტოლებებში x, y, z ცნობილი მუდმივებია და თუ გვეცოდინება A წერტილის კოორდინატები და ეილერის კუთხეები (რომელთა საშუალებით (11.3.5) ფორმულებით გავიგებთ მიმართულების კოსინუსებს) როგორც დროის ფუნქციები, მაშინ (12.1.4) განტოლებებით დროის ნებისმიერ მომენტში შეგვიძლია გავიგოთ სხეულის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები.



ნახ. 12.2



ნახ. 12.3

12.2. სხეულში სიჩქარეთა განაწილების კანონი

(12.1.2) ტოლობა გავაწარმოოთ დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (12.2.1)$$

ამ გამოსახულებაში $\frac{d\vec{r}_M}{dt}$ არის M წერტილის სიჩქარე; აღვნიშნოთ იგი $\vec{v}$ ასოთი. $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$ არის A წერტილის სიჩქარე; აღვნიშნოთ იგი $\vec{v}_A$ -თი. $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ($|\vec{r}| = \text{const}$) წარმოადგენს A პოლუსის გარშემო სხეულის ბრუნვისას M წერტილის სიჩქარეს, ამიტომ

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (12.2.2)$$

სადაც $\vec{\omega}$ მყისი კუთხური სიჩქარეა. მაშინ (12.2.1) ასე ჩაიწერება:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (12.2.3)$$

(12.2.3) ფორმულით გამოითვლება მყარი სხეულის თავისუფალი მოძრაობისას მისი ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე, ამიტომ ეს ფორმულა გამოსახავს ნებისმიერი მოძრაობის დროს სხეულში სიჩქარეთა განაწილების კანონს: ყოველი წერტილის სიჩქარე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების სიჩქარეების ჯამი.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$ და v_x, v_y, v_z არის M წერტილის $\vec{v}$ სიჩქარის გეგმილები შესაბამისად უძრავ და მოძრავ ღერძებზე; $v_{Ax_1}, v_{Ay_1}, v_{Az_1}$ და v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az} არის A წერტილის $\vec{v}_A$ სიჩქარის გეგმილები შესაბამისად უძრავ და მოძრავ ღერძებზე; $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ და $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარის გეგმილები შესაბამისად უძრავ და მოძრავ ღერძებზე; x_1, y_1, z_1 და x, y, z - M წერტილის კოორდინატები შესაბამისად უძრავი და მოძრავი სისტემების მიმართ; x_A, y_A, z_A - A წერტილის კოორდინატები უძრავი სისტემის მიმართ. ადვილად მივიღებთ, რომ $\vec{r}$ ვექტორის გეგმილები შესაბამისად უძრავ და მოძრავ ღერძებზე უდრის $x_1 - x_A, y_1 - y_A, z_1 - z_A$ და x, y, z .

დავაგეგმილოთ უძრავ ღერძებზე (12.2.3) ტოლობა, მივიღებთ:

$$\begin{cases} v_{x_1} = v_{Ax_1} + \omega_{y_1} (z_1 - z_A) - \omega_{z_1} (y_1 - y_A), \\ v_{y_1} = v_{Ay_1} + \omega_{z_1} (x_1 - x_A) - \omega_{x_1} (z_1 - z_A), \\ v_{z_1} = v_{Az_1} + \omega_{x_1} (y_1 - y_A) - \omega_{y_1} (x_1 - x_A). \end{cases} \quad (12.2.4)$$

ახლა (12.2.3) დავაგეგმილოთ მოძრავ ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} v_x = v_{Ax} + \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y = v_{Ay} + \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z = v_{Az} + \omega_x y - \omega_y x. \end{cases} \quad (12.2.5)$$

დავამტკიცოთ, რომ სხეულის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება არ არის დამოკიდებული პოლუსის არჩევაზე.

ვთქვათ, ნებისმიერად შერჩეული A პოლუსისთვის კუთხური სიჩქარე არის $\vec{\omega}_A$, ხოლო B პოლუსისთვის - $\vec{\omega}_B$ (ნახ. 12.3). შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\overrightarrow{AM} = \vec{r}$ და $\overrightarrow{BM} = \vec{r}_A$. (12.2.3) ფორმულის თანახმად

$$\vec{v} = \vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_A, \quad \vec{v} = \vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_B \Rightarrow \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_B. \quad (12.2.6)$$

(12.2.3) ფორმულა გვაძლევს: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AB}$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (12.2.6)-ში, მივიღებთ:

$$\vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_A = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_B \Rightarrow \vec{\omega}_A \times (\vec{r}_A - \overrightarrow{AB}) = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_B. \quad (12.2.7)$$

ნახ. 12.3-დან $\vec{r}_A - \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B$. შევიტანოთ ეს შედეგი (12.2.7)-ში, მივიღებთ: $(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \vec{r}_B = 0$. B პოლუსი ნებისმიერადაა შერჩეული, ამიტომ $\vec{r}_B \neq 0$. მაშინ $\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B = 0 \Rightarrow \vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$ და აქედან $\frac{d\vec{\omega}_A}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_B}{dt} \Leftrightarrow \vec{\varepsilon}_A = \vec{\varepsilon}_B$.

რაც შეეხება სხეულის გადატანით მოძრაობას, ის დამოკიდებულია პოლუსის არჩევაზე (იხ. §10.3).

12.3. სხეულში აჩქარებათა განაწილების კანონი

გავაწარმოოთ (12.2.3) ტოლობა დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (12.3.1)$$

$\frac{d\vec{v}}{dt}$ არის M წერტილის აჩქარება; აღვნიშნოთ იგი $\vec{w}$ -თი. $\frac{d\vec{v}_A}{dt}$ არის A პოლუსის აჩქარება; აღვნიშნოთ იგი $\vec{w}_A$ -თი. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (იხ. წინა პარაგრაფი). $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ კუთხური აჩქარებაა, ამიტომ (12.3.1) ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$\vec{w} = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (12.3.2)$$

აღსანიშნავია, რომ ბოლო ტოლობაში $\vec{w}_A$ პოლუსის აჩქარება ახასიათებს სხეულის გადატანით მოძრაობას, ხოლო $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ - ბრუნვით მოძრაობას. ვექტორთა ალგებრიდან ცნობილია, რომ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, რომლის გათვალისწინება გვაძლევს: $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}$. მაშინ (12.3.2) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{w} = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}. \quad (12.3.3)$$

(12.3.3) ფორმულა გამოსახავს ნებისმიერი მოძრაობის დროს სხეულში აჩქარებათა განაწილების კანონს.

თუ (12.3.3) ვექტორულ ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ თავისუფალი მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის დროს მისი ნებისმი-

ერი წერტილის აჩქარების გეგმილების გამოსათვლელ ფორმულებს როგორც უძრავ, ისე მოძრავ სისტემაში.

ამოცანა 12.1. სხეული მოძრაობს სივრცეში $x_M=0$, $y_M=20t$, $z_M=20t-4,9t^2$, $\psi=3$ რად, $\theta=0,5$ რად, $\varphi=12(1-e^{-0,25t})$ რად განტოლებების მიხედვით. დროის $t=4$ წმ მომენტისათვის განსაზღვრეთ სხეულის კუთხური სიჩქარის მოდული.

ამოხსნა. როცა მოცემული გვაქვს ეილერის კუთხეები, მაშინ კუთხური სიჩქარის მოდულის გასაგებად გვაქვს შემდეგი ფორმულა (იხ. (11.7.4) ფორმულა):

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta.$$

ჩვენ შემთხვევაში $\dot{\psi}=0$, $\dot{\theta}=0$, $\dot{\varphi}=3e^{-0,25t}$, ამიტომ $\omega^2 = (3e^{-0,25t})^2 \Rightarrow \omega = 3e^{-0,25t}$.

როცა $t=4$ წმ, მაშინ $\omega = 3e^{-0,25 \cdot 4} = 3e^{-1} \approx 3/2,72 \approx 1,10$ რად/წმ.

პასუხი. 1,10 რად/წმ.

ამოცანა 12.2. თავისუფლად მოძრავი სხეულის პოლუსის მოძრაობის განტოლებებია $x_0=2t$, $y_0=8t$, $z_0=5t^2$, ხოლო მყისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. $t=1$ წმ დროის მომენტში განსაზღვრეთ სხეულის იმ წერტილის სიჩქარის გეგმილი უძრავ Ox დერძზე, რომლის რადიუს-ვექტორი პოლუსის მიმართ $\vec{OA}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (12.2.5) ფორმულებიდან პირველი ტოლობა: $v_x = v_{0x} + \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y$. გვაქვს: $v_{0x} = dx_0/dt = 2$, $y=1$, $z=2$, $\omega_y = -1$, $\omega_z = 1$, მაშინ $v_x = 2 + (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -1$.

პასუხი. -1.

ამოცანა 12.3. თავისუფლად მოძრავი სხეულის O წერტილის მოძრაობის განტოლებებია $x_0=5t$, $y_0=-5t$, $z_0=-2t^2$ და მყისი კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$. დროის $t=2$ წმ მომენტში განსაზღვრეთ სხეულის A წერტილის სიჩქარის გეგმილი უძრავ Oy დერძზე, თუ რადიუს-ვექტორი $\vec{OA}=\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (12.2.5) ფორმულებიდან მეორე ტოლობა: $v_y = v_{0y} + \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z$. გვაქვს: $v_{0y} = dy_0/dt = -5$, $x=1$, $z=-2$, $\omega_x = 2$, $\omega_z = 1$, მაშინ $v_y = -5 + 1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 0$.

პასუხი. 0.

ამოცანა 12.4. სხეული მოძრაობს თავისუფლად. დროის მომენტში, როცა O პოლუსის აჩქარება $\vec{w}_0=2\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}$, კუთხური სიჩქარე $\omega=0$ და კუთხური აჩქარება $\vec{\varepsilon}=2\vec{i}-5\vec{k}$, განსაზღვრეთ სხეულის M წერტილის აჩქარება, თუ $\vec{OM}=2\vec{i}-5\vec{k}$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (12.3.2) ფორმულა, რომელიც ჩვენი შემთხვევისთვის შეგვიძლია ჩასვწეროთ ასეთი სახით: $\vec{w}_M = \vec{w}_0 + (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v})$. გვაქვს: $w_{0x}=2$, $w_{0y}=5$, $w_{0z}=5$, $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$, $x_M=2$, $y_M=0$, $z_M=-5$, $\varepsilon_x=2$, $\varepsilon_y=0$, $\varepsilon_z=-5$. მაშინ

$$w_{Mx} = w_{0x} + \varepsilon_y \cdot z_M - \varepsilon_z \cdot y_M = 2 + 0 + 0 = 2;$$

$$w_{My} = w_{0y} + \varepsilon_z \cdot x_M - \varepsilon_x \cdot z_M = 5 + (-5) \cdot 2 - 2 \cdot (-5) = 5;$$

$$w_{Mz} = w_{0z} + \varepsilon_x \cdot y_M - \varepsilon_y \cdot x_M = 5 + 0 + 0 = 5.$$

მაშინ $w_M = \sqrt{2^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{54} \approx 7,35.$

პასეუბო. 7,35.