რთული მოძრაობა

XIII თავი

წერტილის რთული მოძრაობა

13.1. წერტილის რთული მოძრაობის განტოლებები

ხშირად მექანიკური ამოცანების ამოხსნისას იძულებული ვართ წერტილის მოძრაობა განვიხილოთ ერთდროულად ორი (ზოგჯერ უფრო მეტი) ათვლის სხეულის მიმართ. მაგალითად, მთვარის მიმართ კოსმოსური ხომალდის მოძრაობისას აუცილებელია მისი მოძრაობის განხილვა როგორც მთვარის, ისე დედამიწის მიმართ; ამასთან მთვარე თავად მოძრაობს დედამიწის მიმართ. ცხადია, ამ შემთხვევაში ხომალდი ასრულებს რთულ მოძრაობას.

ჩვენ განვიხილავთ წერტილის ყველაზე მარტივ რთულ მოძრაობას: წერტილი მოძრაობს ისეთი ორი სხეულის მიმართ, რომელთაგან ერთი-ერთი უძრავია. უძრავ სხეულთან მკვიდრად დავაკავშიროთ $O_1x_1y_1z_1$, ხოლო მოძრავთან - $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა. რასაკვირველია, $O_1x_1y_1z_1$ **სისტემა უძრავია, ხოლო** $Oxyz$ **- მოძრავი.**

შევისწავლოთ M წერტილის მოძრაობა. მისი კოორდინატები უძრავ და მოძრავ სისტემებში შესაბამისად აღვნიშნოთ x_1, y_1, z_1 და x, y, z-ით (ნახ. 13.1).

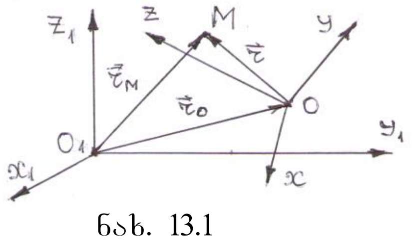
განსაზღვრა. წერტილის მოძრაობას მოძრავი სისტემის მიმართ ვუწოდოთ **წერტილის ფარდობითი მოძრაობა,** ხოლო წერტილის მოძრაობას უძრავი სისტემის მიმართ – **რთული** ანუ **აბსოლუტური.** წერტილის მოძრაობას იმ შემთხვევაში, როცა ის უძრავია მოძრავი სისტემის მიმართ, ვუწოდოთ **წარმტანი მოძრაობა.**

ცხადია, წარმტანი მოძრაობისას წერტილის x, y, z კოორდინატები მუდმივი სიდიდეებია. წარმტან მოძრაობას ასეც განმარტავენ: ეს არის მოძრავი სისტემის მოძრაობა უძრავი სისტემის მიმართ.

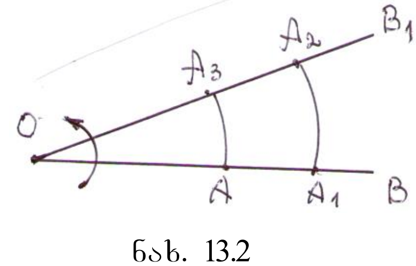
თითეულ ამ მოძრაობას აქვს თავისი ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

ცხადია, რომ ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები წარმოადგენენ აბსოლუტური მოძრაობის შემდგენ მოძრაობებს.

ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობების დასადგენად არსებობს შემდეგი ხერხი: პირობით დავუშვათ, რომ მოძრავი სხეული გაჩერდა, მაშინ წერტილის მიერ შესრულებული მოძრაობა იქნება ფარდობითი მოძრაობა; თუ დავუშვებთ, რომ წერტილი არ მოძრაობს მოძრავი სხეულის მიმართ, მაშინ ამ სხეულთან ერთად მის მიერ შესრულებული მოძრაობა იქნება წარმტანი მოძრაობა.



ნახ. 13.1



ნახ. 13.2

ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები განიცდიან ურთიერთგავლენას. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი (ნახ. 13.2). A წერტილი მოძრაობს OB

სხივის გასწვრივ, რომელიც თავის მხრივ ბრუნავს ქაღალდის სიბრტყეში O უძრავი წერტილის გარშემო. A წერტილი ერთდროულად მოძრაობს OB სხივის გასწვრივ და მასთან ერთად ბრუნავს O წერტილის გარშემო, ამიტომ იგი ასრულებს რთულ მოძრაობას. თუ გამოვიყენებთ ზემოთ ჩამოყალიბებულ ხერხს, ადვილად დავადგენთ, რომ OB სხივის გასწვრივ მოძრაობა არის ფარდობითი, ხოლო O წერტილის გარშემო ბრუნვა – წარმტანი.

ვთქვათ, დროის რაიმე t მომენტში წერტილი OB სხივზე იმყოფებოდა A მდებარეობაში. დავუშვათ, რომ დროის Δt შუალედში OB სხივმა დაიკავა OB_1 მდებარეობა. იმავე დროის შუალედში, ფარდობითი მოძრაობის შედეგად, A წერტილმა უნდა დაიკავოს რაღაც A_1 მდებარეობა, მაგრამ წარმტანი მოძრაობის (სხივის ბრუნვის) შედეგად ის აღმოჩნდა OB_1 სხივზე A_2 მდებარეობაში. A წერტილი წარმტანი მოძრაობის შედეგად დროის Δt შუალედში უნდა მოხვდრილიყო OB_1 სხივის A_3 წერტილში, მაგრამ ფარდობითი მოძრაობის გამო ის აღმოჩნდა A_2 მდებარეობაში. განხილული მაგალითი ნათლად გვიჩვენებს ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობების ურთიერთგავლენას.

აღსანიშნავია ერთი საინტერესო ფაქტი. განხილულ მაგალითში წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორიებია OA, OA_1 და ა. შ. რადიუსიანი წრეწირები. მაგრამ ფარდობითი მოძრაობის შედეგად, წერტილი ამ წრეწირებზე მხოლოდ ერთ წერტილში იმყოფება. ამგვარად, წერტილის წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორია წრეწირი კი არ არის, არამედ ყოველ წრეწირზე ერთ წერტილი. ამის გამო, ხშირად ამბობენ, რომ არა გვაქვს წარმტანი მოძრაობის ტრაექტორია. შევადგინოთ თითოეული მოძრაობის განტოლებები. დავიწყოთ ფარდობითი მოძრაობით. თუ ვიცით

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \tag{13.1.1}$$

უწყვეტი ფუნქციები, მაშინ დროის ყოველ მომენტში გვეცოდინება წერტილის მდებარეობა მოძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამიტომ (13.1.1)-ს **წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებები** ეწოდება. თუ ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t პარამეტრს, მივიღებთ ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორიას.

ახლა შევადგინოთ წერტილის რთლი მოძრაობის განტოლებები. ნახ. 13.1-დან

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{r}\ . \tag{13.1.2}$$

Ox, Oy, Oz ღერძების ორტები აღვნიშნოთ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-თი, მაშინ

$$\vec{r} = \vec{i}\, x + \vec{j}\, y + \vec{k}\, z\,. \tag{13.1.3}$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა წინა ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{i}\, x + \vec{j}\, y + \vec{k}\, z\,. \tag{13.1.4}$$

დავაგეგმილოთ ბოლო ტოლობა უძრავ ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + l_1\, x + l_2\, y + l_3\, z, \\ y_1 = y_0 + m_1\, x + m_2\, y + m_3\, z, \\ z_1 = z_0 + n_1\, x + n_2\, y + n_3\, z, \end{cases} \tag{13.1.5}$$

სადაც x_0, y_0, z_0 არის O წერტილის კოორდინატები, ხოლო $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ მოძრავი ღერძების მიერ უძრავ ღერძებთან შედგენილი კუთხეების კოსინუსებია (იხ. §11.3). თუ წინასწარ ცნობილია $Oxyz$ სისტემის მოძრაობა (ე.ი. ცნობილია x_0, y_0, z_0, $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ სიდიდეები) და x, y, z (იხ. (13.1.1) ფორმულები), მაშინ ვიცით წერტილის მოძრაობა უძრავი სისტემის მიმართ, ამიტომ (13.1.5) **წერტილის რთული მოძრაობის განტოლებებია**. თუ ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t პარამეტრს, მივიღებთ რთული მოძრაობის ტრაექტორიას.

როცა წარმტანი მოძრაობა ბრტყელია და ფარდობითი მოძრაობა ხდება ამავე სიბრტყეში, (13.1.5) განტოლებები ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y_1 = y_0 + x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases} \tag{13.1.6}$$

სადაც α არის O_1x_1 და Ox ღერძებს შორის კუთხის სიდიდე.

თუ ამასთან ერთად წარმტანი მოძრაობა გადატანითიცაა და მოძრავ და უძრავ ღერძებს შევარჩევთ ერთმანეთის პარალელურად, მაშინ (13.1.6)-დან მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x, \\ y_1 = y_0 + y. \end{cases} \tag{13.1.7}$$

თუ წარმტანი მოძრაობა არის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო, მაშინ ფარდობითი მოძრაობა ხდება ამ ღერძის მართობ სიბრტყეში და, თუ ფარდობითი კოორდინატთა სისტემის სათავეს ავიღებთ ბრუნვის ღერძზე, ხოლო Oz ღერძს დავამთხვევთ Oz_1 ღერძს, მაშინ

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{13.1.8}$$

წერტილის **წარმტანი მოძრაობის განტოლებების** მისაღებად (13.1.5)-ში უნდა დავუშვათ, რომ x, y, z მუდმივი სიდიდეებია.

13.2. სიჩქარეთა შეკრების კანონი

თეორემა. წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე მისი ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების ვექტორული ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. M წერტილის რთული მოძრაობის გამომსახველი (13.1.4) ტოლობა გავაწარმოოთ დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt}x + \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt}z + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}. \tag{13.2.1}$$

მიღებულ ტოლობაში $\frac{d\vec{r}_M}{dt}$ არის M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე. აღვნიშნოთ იგი $\vec{v}_ა$-თი. (13.2.1) ტოლობაში დავუშვათ, რომ x, y, z სიდიდეები მუდმივებია (ე.ი. წერტილი გაჩერდა მოძრავ სისტემაში), მაშინ მარჯვენა მხარეში დაგვრჩება $\frac{d\vec{r}_0}{dt} +$

$\dfrac{d\vec{i}}{dt}x+\dfrac{d\vec{j}}{dt}y+\dfrac{d\vec{k}}{dt}z$, რაც წერტილის წარმტანი სიჩქარეა და თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{v}_{\text{წ}}$-თი, გვექნება:

$$\vec{v}_{\text{წ}}=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+\frac{d\vec{i}}{dt}x+\frac{d\vec{j}}{dt}y+\frac{d\vec{k}}{dt}z\,. \tag{13.2.2}$$

ახლა დავუშვათ, რომ მოძრავი სხეული გაჩერდა (ე.ი. $\vec{r}_0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ სიდიდეები გახდნენ მუდმივები)); ცხადია, (13.2.1) ტოლობის მარჯვენა მხარეში დაგვრჩება წერტილის ფარდობითი სიჩქარე და თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{v}_{\text{ფ}}$-თი, გვექნება:

$$\vec{v}_{\text{ფ}}=\vec{i}\,\frac{dx}{dt}+\vec{j}\,\frac{dy}{dt}+\vec{k}\,\frac{dz}{dt}\ . \tag{13.2.3}$$

მიღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით (13.2.1) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{v}_{\text{ა}}=\vec{v}_{\text{ფ}}+\vec{v}_{\text{წ}}\,. \tag{13.2.4}$$

(13.2.4) ტოლობა ამტკიცებს ზემოთ ჩამოყალიბებულ თეორემას.

ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების განსაზღვრის შემდეგ აბსოლუტური სიჩქარის გასაგებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ორი ვექტორის შეკრების პარალელოგრამის წესი და გვექნება:

$$v_{\text{ა}}=\sqrt{v_{\text{ფ}}^2+v_{\text{წ}}^2+2v_{\text{ფ}}v_{\text{წ}}\cos\left(\vec{v}_{\text{ფ}}\,\hat{}\,\vec{v}_{\text{წ}}\right)}\,,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\left|\vec{v}_{\text{ფ}}\right|}=\frac{\sin\beta}{\left|\vec{v}_{\text{წ}}\right|}=\frac{\sin\left(\vec{v}_{\text{ფ}}\,\hat{}\,\vec{v}_{\text{წ}}\right)}{\left|\vec{v}_{\text{ა}}\right|}\quad =>\quad \sin\alpha=\frac{\left|\vec{v}_{\text{ფ}}\right|}{\left|\vec{v}_{\text{ა}}\right|}\sin\left(\vec{v}_{\text{ფ}}\,\hat{}\,\vec{v}_{\text{წ}}\right),\quad \sin\beta=\frac{\left|\vec{v}_{\text{წ}}\right|}{\left|\vec{v}_{\text{ა}}\right|}\sin\left(\vec{v}_{\text{ფ}}\,\hat{}\,\vec{v}_{\text{წ}}\right), \tag{13.2.5}$$

სადაც α და β შესაბამისად აბსოლუტურ სიჩქარესა და ფარდობით და წარმტან სიჩქარეებს შორის კუთხეებია.

13.3. აჩქარებათა შეკრების კანონი

თეორემა. წერტილის აბსოლუტური აჩქარება ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებების ვექტორული ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის განმსაზღვრელი (13.2.1) ტოლობა გავაწარმოოთ დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2}=\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}+\ \frac{d^2\vec{i}}{dt^2}x+\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}y+\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}z+\vec{i}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\vec{j}\,\frac{d^2y}{dt^2}+\vec{k}\,\frac{d^2z}{dt^2}+$$
$$+\ 2\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d\vec{j}}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d\vec{k}}{dt}\frac{dz}{dt}\right). \tag{13.3.1}$$

მიღებულ გამოსახულებაში $\dfrac{d^2\vec{v}_M}{dt^2}$ არის წერტილის აბსოლუტური აჩქარება; აღვნიშნოთ იგი $\vec{w}_{\text{ა}}$-თი.

დავუშვათ, რომ წერტილი გაჩერდა მოძრავ სისტემაში, მაშინ (13.3.1) ტოლობაში დარჩენილი გამოსახულება წარმოადგენს წერტილის წარმტან აჩქარებას და თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{w}_{\text{წ}}$-ით, გვექნება:

$$\vec{w}_{\text{წ}}=\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}+\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}x+\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}y+\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}z\,. \qquad (13.3.2)$$

ახლა დავუშვათ, რომ მოძრავი სხეული გაჩერდა (ე.ი. $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ სიდიდეები გახდა მუდმივები), მაშინ (13.3.1) ტოლობაში დარჩენილი გამოსახულება წარმოადგენს წერტილის ფარდობით აჩქარებას და თუ მას აღვნიშნავთ $\vec{w}_{\text{ფ}}$-თი, გვექნება:

$$\vec{w}_{\text{ფ}}=\vec{i}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\vec{j}\,\frac{d^2y}{dt^2}+\vec{k}\,\frac{d^2z}{dt^2}\,. \qquad (13.3.3)$$

(13.3.1) ტოლობის მარჯვენა მხარეში კიდევ დარჩა გარკვეული გამოსახულება. ვუწოდოთ მას **კორიოლისის აჩქარება** და თუ შემოვიღებთ მისთვის $\vec{w}_{\text{კ}}$ აღნიშვნას, მივიღებთ:

$$\vec{w}_{\text{კ}}=2\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d\vec{j}}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d\vec{k}}{dt}\frac{dz}{dt}\right). \qquad (13.3.4)$$

(13.3.2)-(13.2.4) აღნიშვნების გათვალისწინებით (13.3.1) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\vec{w}_{\text{ა}}=\vec{w}_{\text{ფ}}+\vec{w}_{\text{წ}}+\vec{w}_{\text{კ}}\,. \qquad (13.3.5)$$

თეორემა დამტკიცებულია. მას **კორიოლისის თეორემა** ეწოდება.

13.4. კორიოლისის აჩქარება

გარდავქმნათ (13.3.4) ტოლობით მოცემული კორიოლისის აჩქარება. ჯერ ერთი $\frac{dx}{dt}=v_x,\ \frac{dy}{dt}=v_y,\ \frac{dz}{dt}=v_z$ წარმოებულები ფარდობითი სიჩქარის გეგმილებია; შემდეგ გავიხსენოთ (11.6.7)-ით მოცემული პუასონის ფორმულები: $\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}$, $\frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{j}$, $\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{k}$, სადაც $\vec{\omega}$ წარმტანი მოძრაობის შემდგენი ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარეა.

მიღებული გამოსახულებები შევიტანოთ (13.3.4) ტოლობაში, გვექნება:

$$\vec{w}_{\text{კ}}=2\left(\left(\vec{\omega}\times\vec{i}\right)v_x+\left(\vec{\omega}\times\vec{j}\right)v_y+\left(\vec{\omega}\times\vec{k}\right)v_z\right)=\ 2\left(\vec{\omega}\times\left(\vec{i}\,v_x+\vec{j}\,v_y+\vec{k}\,v_z\right)\right)=2\left(\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{ფ}}\right).$$

კორიოლისის აჩქარებისათვის საბოლოოდ მივიღეთ:

$$\vec{w}_{\text{კ}}=2\left(\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{ფ}}\right). \qquad (13.4.1)$$

მისი მოდული ასე გამოითვლება:

$$w_{\text{კ}}=2\,\omega v_{\text{ფ}}\sin\left(\vec{\omega}\,\hat{}\,\vec{v}_{\text{ფ}}\right). \qquad (13.4.2)$$

(13.4.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ კორიოლისის აჩქარება არ არსებობს, თუ:

1. $\omega=0$. ამ დროს მოძრავი სისტემა მოძრაობს გადატანით. ამ შემთხვევაში (13.3.5) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{w}_{\text{ა}}=\vec{w}_{\text{ფ}}+\vec{w}_{\text{წ}}\,, \qquad (13.4.3)$$

ამასთან $\vec{w}_{\text{წ}}=\vec{w}_0$.

2. $v_{ფ}=0$. ამ შემთხვევაში ფარდობითი მოძრაობა არ არსებობს და, რასაკვირველია, საზოგადოდ, არც რთული მოძრაობა არსებობს.

3. $v_{ფ}\neq 0,\ \omega\neq 0,\ \vec{v}_{ფ}\parallel\vec{\omega}$. ამ შემთხვევაში $\sin\left(\vec{\omega}\,\hat{}\,\vec{v}_{ფ}\right)=0$.

რაც შეეხება კორიოლისის აჩქარების მიმართულებას, ის ისე უნდა შეირჩეს, რომ $\vec{\omega},\vec{v}_{ფ},\vec{w}_{კ}$ ვექტორებმა (თუ მათ ერთ წერტილზე მოვდებთ) უნდა შეადგინონ მარჯვენა სისტემა.

კორიოლისის აჩქარების გასაგებად არსებობს **ჟუკოვსკის წესი,** რომელიც ასე ჩამოყალიბდება: $\vec{v}_{ფ}$ ვექტორს ვაგეგმილებთ $\vec{\omega}$ ვექტორის მართობ სიბრტყეში. გეგმილს ვამრავლებთ 2ω-ზე და მიღებულ ვექტორს ვაბრუნებთ 90°-იანი კუთხით ბრუნვის მხარეს. ამ გზით მიღებული ვექტორი არის კორიოლისის აჩქარება.

განვიხილოთ ნებისმიერი სხეულის მოძრაობა დედამიწის მახლობლობაში. მისი მოძრაობა დედამიწის მიმართ არის ფარდობითი მოძრაობა, ხოლო დედამიწის ბრუნვა – წარმტანი. რადგანაც დედამიწა მართლა ბრუნავს, ამიტომ დედამიწის მახლობლობაში მოძრავი სხეულის ყოველ წერტილს აქვს კორიოლისის აჩქარება.

დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\omega=2\pi/24\cdot 60\cdot 60\approx 7{,}3\cdot 10^{-5}$ რად/წმ.

13.5. მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

ამოცანის ამოხსნა უნდა დავიწყოთ უძრავი და მოძრავი ათვლის სისტემების დადგენით და წარმტანი მოძრაობის ხასიათის გამორკვევით. ამის შემდეგ უნდა დავადგინოთ, წერტილის რომელი მოძრაობაა აბსოლუტური და რომელი – ფარდობითი.

განსახილველ თემასთან დაკავშირებული ამოცანები იყოფა ორ ძირითად ტიპად:

1. ცნობილია წერტილის ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები. მოითხოვება განისაზღვროს წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებები და აბსოლუტური ტრაექტორია.

2. ცნობილია წერტილის აბსოლუტური და წარმტანი მოძრაობები. მოითხოვება განისაზღვროს წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებები და ფარდობითი ტრაექტორია.

პირველი ტიპის ამოცანა დაიყვანება ორი შემდგენი მოძრაობის შეკრებით. მეორე ამოცანაში ცნობილი აბსოლუტური მოძრაობა უნდა დაიშალოს ცნობილ წარმტან და უცნობ ფარდობით მოძრაობებად ამ უკანასკნელის გაგების მიზნით.

ამოცანა 13.1. ბაქანი მოძრაობს თანაბრად ჰორიზონტალური მიმართულებით 1 მ/წმ სიჩქარით (ნახ. 13.3). ბაქანზე მისი მოძრაობის პარალელურად გადაადგილდება ურიკა $s=0{,}5t$ კანონით. ჩათვალეთ ურიკა წერტილად და გაიგეთ მისი კოორდინატები დროის t=4 წმ-ს მომენტში, თუ საწყის მომენტში ურიკა იმყოფებოდა O წერტილში.

ამოხსნა. უძრავი სხეულია დედამიწა, ხოლო მოძრავი – ბაქანი. თუ ურიკას გავაჩერებთ ბაქანზე, მაშინ იგი იმოძრავებს მხოლოდ ბაქანთან ერთად, როგორც მისი ნაწილი. ამგვარად, წარმტანი მოძრაობა არის ბაქანის წრფივი თანაბარი მოძრაობა, რომლის სიჩქარე $v_{წ}$=1 მ/წმ. თუ ბაქანს გავაჩერებთ, მაშინ ურიკა იმოძრავებს მხო-

ლოდ ბაქანის მიმართ $s=0,5t$ კანონით. ეს არის ურიკის ფარდობითი მოძრაობა. უცნობია აბსოლუტური მოძრაობა.

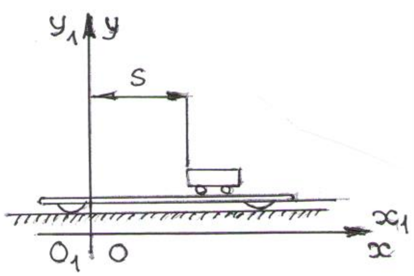
გავიგოთ ურიკის აბსოლუტური მოძრაობის კანონი. ვინაიდან წარმტანი მოძრაობა ბრტყელი და გადატანითია, ამიტომ ურიკის აბსოლუტური მოძრაობის x_1, y_1 კოორდინატების გასაგებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (13.1.7) განტოლებები: $x_1=x_0+x$, $y_1=y_0+y$, სადაც x_0, y_0 წარმტანი, ხოლო x, y - ფარდობითი მოძრაობის კოორდინატებია.

შესაძლებელია ორი შემთხვევა: ბაქანი და ურიკა მოძრაობენ: 1. ერთი მიმართულებით და 2. საწინააღმდეგო მიმართულებით.

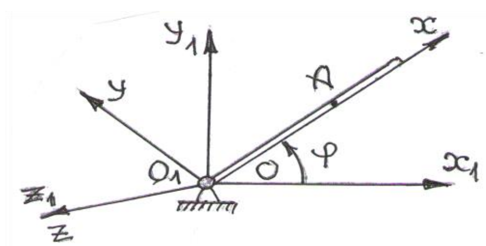
საწყის მომენტში მოძრავი Ox და Oy კოორდინატთა ღერძები დავამთხვიოთ შესაბამის უძრავ O_1x_1 და O_1y_1 კოორდინატთა ღერძებს. არჩეული კოორდინატთა სისტემის და ამოცანის პირობის თანახმად, $x_0=v_{\text{წ}}\cdot t=t$, $y_0=y=y_1=0$, მ, $x=s=0,5t$ მ. მაშინ 1. $x_1=t+0,5t=1,5t$ მ, $y_1=0$; 2. $x_1=t-0,5t=0,5t$ მ, $y_1=0$. როცა $t=4$ წმ-ს, მაშინ 1. $x_1=6$ მ და 2. $x_1=2$ მ.

პასუხი. 1. $x_1=1,5t$ მ; $y_1=0$; როცა $t=4$ წმ, მაშინ $x_1=6$ მ;

2. $x_1=0,5t$ მ; $y_1=0$; როცა $t=4$ წმ, მაშინ $x_1=$მ 2.



ნახ. 13.3



ნახ. 13.4

ამოცანა 13.2. Oz ღერძის გარშემო $\varphi=4t$ კანონით მბრუნავ მილაკში მოძრაობს ბურთულა $OA=5t^2$ კანონით (ნახ. 13.4). განსაზღვრეთ ბურთულას აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებები და კოორდინატების მნიშვნელობები, როცა $t=0{,}25$ წმ. [61]

ამოხსნა. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ წარმტანი მოძრაობა არის მილაკის ბრუნვა Oz ღერძის გარშემო, ხოლო ფარდობითი – ბურთულას გადაადგილება მილაკში. მოძრავი Oxy სიბრტყე შევუთავსოთ უძრავ $0_1x_1y_1$ სიბრტყეს (ნახ .13.4). ვინაიდან წარმტანი მოძრაობა ბრუნვითია, ამიტომ აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებების გასაგებად გამოვიყენოთ (13.1.8) ფორმულები:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

არჩეული კოორდინატთა სისტემის და ამოცანის პირობის თანახმად, $x=5t^2$, $y=0$, $\alpha=4t$, მაშინ

$$\begin{cases} x_1 = 5t^2 \cos 4t, \\ y_1 = 5t^2 \sin 4t. \end{cases}$$

მიღებული ტოლობები ბურთულას აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებებია. როცა t =0,25 წმ, მაშინ

$$x_1 = 5\cos 1/16 \approx 5\cos 57,3^\circ/16 \approx 5\cdot 0,54/16 \approx 0,169\,;\quad y_1 \approx 5\cdot 0,84/16 \approx 0,26.$$

პასუხი. $x_1 = 5t^2 \cos 4t$, $y_1 = 5t^2 \sin 4t$; როცა t=0,25 წმ, მაშინ x_1=0,169; y_1=0,26.

ამოცანა 13.3. ტრამვაი მოძრაობს v=18 კმ/სთ სიჩქარით გზის ჰორიზონტალურ უბანზე. ძარა რესორებზე ასრულებს ჰარმონიულ რხევას a=0,8 სმ ამპლიტუდით და T=0,5 წმ პერიოდით. იპოვეთ ძარის სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიის განტოლება, თუ მისი საშუალო მანძილი გზის ლიანდაგიდან h=1,5 მ. როცა t=0, მაშინ სიმძიმის ცენტრი შუა მდებარეობაშია და რხევის სიჩქარე მიმართულია ზევით. Ox ღერძი მიმართეთ ჰორიზონტალურად ლიანდაგის გასწვრივ მოძრაობის მიმართულების თანხვედრილად, ხოლო Oy- ვერტიკალურად ზევით ისე, რომ t=0 საწყის მომენტში იგი გადიოდეს სიმძიმის ცენტრზე (ნახ. 13.5).

ამოხსნა. ტრამვაის მოძრაობა წარმტანი მოძრაობაა, ხოლო ძარას მოძრაობა – ფარდობითი. გასაგებია სიმძიმის ცენტრის აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებები.

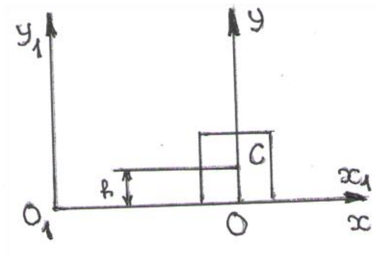
ვინაიდან წარმტანი მოძრაობა ბრტყელი და გადატანითია, ამიტომ აბსოლუტური მოძრაობის კოორდინატების გასაგებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (13.1.7) განტოლებები: $x_1 = x_0 + x,\;\; y_1 = y_0 + y$.

ცხადია, რომ $\vec{v}_{წ} = \vec{v}$ => $x_{წ} = x_0 = vt$, $y_{წ} = y_0$=0. ფარდობითი მოძრაობა ჰარმონიული რხევაა Oy ღერძის გასწვრივ, თანაც საწყის მომენტში C სიმძიმის ცენტრი იმყოფება Ox ღერძიდან h მანძილზე, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ: x=0, $y = h +$ $+ a\sin kt$. პირობის თანახმად, h=1,5 მ, a=0,8 სმ=0,008 მ. გავიგოთ k. $T = 2\pi/k$ => $k =$ $= 2\pi/T = 2\pi/0,5 = 4\pi$, მაშინ x=0, $y = 1,5 + 0,008\sin 4\pi t$ მ. გავითვალისწინოთ, რომ v=18 კმ/სთ = 5 მ/წმ და მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (13.1.7) ტოლობებში, მივიღებთ: $x_1 = 5t + 0 = 5t$ მ, $y_1 = 0 + 1,5 + 0,008\sin 4t = 1,5 + 0,008\sin 4\pi t$ მ. ამ ტოლობებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი, მივიღებთ: $t = \pi/5$, $y_1 = 1,5 + 0,008\sin 0,8\pi x_1$.

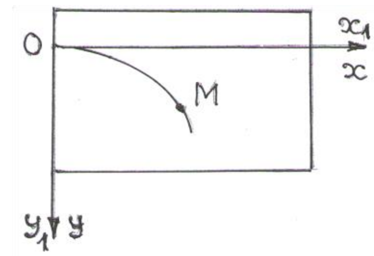
პასუხი. $y_1 = 1,5 + 0,008\sin 0,8\pi x_1$.

ამოცანა 13.4. ჰორიზონტალური მიმართულებით $\vec{u}$ სიჩქარით თანაბრად მოძრავი ვერტიკალური დაფის წინ უსაწყისო სიჩქარით თავისუფლად ვარდება ცარცის M ნატეხი (ნახ. 13.6). განსაზღვრეთ იმ მრუდის სახე, რომელსაც ცარცი დახაზავს დაფაზე.

ამოხსნა. მივიღოთ, რომ საწყის მომენტში ცარცი იმყოფება O წერტილში. დაფის მოძრაობა არის წარმტანი მოძრაობა, რომელიც ბრტყელი და გადატანითია. შევარჩიოთ მოძრავი და უძრავი სისტემების შესაბამისი ღერძები ერთმანეთის პარალელურად, მაშინ ცარცის აბსოლუტური მოძრაობის კოორდინატების გასაგებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (13.1.7) განტოლებები: $x_1 = x_0 + x,\;\; y_1 = y_0 + y$.



ნახ. 13.5



ნახ. 13.6

ცხადია, რომ $\vec{v}_{\text{ფ}} = \vec{u}$ => $x_{\text{ფ}} = x_0 = -ut$, $y_{\text{ფ}} = y_0 = 0$; ცარცის მოძრაობა დაფის მიმართ არის ფარდობითი მოძრაობა, რომელიც უცნობია. ცარცის თავისუფალი ვარდნა აბსოლუტური მოძრაობაა, ამიტომ $x_{\text{ა}} = x_1 = 0$, $y_{\text{ა}} = y_1 = gt^2/2$. შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (13.1.7) ტოლობებში, მივიღებთ:

$$0 = -ut + x, \ \ gt^2/2 = y \qquad => \qquad x = ut, \ \ y = gt^2/2. \qquad (\text{ა})$$

(ა) არის ცარცის ფარდობითი მოძრაობის განტოლებები. ტრაექტორიის განტოლების მისაღებად ამ ტოლობებიდან უნდა გამოვრიცხოთ t პარამეტრი, მივიღებთ:

$$y = \frac{g}{2u^2}x^2 \qquad (a = g/2u^2, \ c = 0, \ b = 0). \qquad (\text{ბ})$$

ეს არის პარაბოლა ვერტიკალური ღერძით, რომლის პარამეტრი $p = 1/2|a| = u^2/g$.

პასუხი. $y = \dfrac{g}{2u^2}x^2, \ \ p = u^2/g$.

ამოცანა 13.5. საბრუნი ამწე ბრუნავს O_1 წერტილზე გამავალი ნახაზის სიბრტყის მართობი ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.7,ა). ამწის ისრის მიმართულებით, რომელიც ემთხვევა O_1x ღერძს, მოძრაობს M ურიკა ტვირთით $x = a\cos kt$, $y = 0$ კანონის მიხედვით. განსაზღვრეთ M ურიკის აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებები და მისი ტრაექტორია, თუ $\varphi = kt$.

ამოხსნა. ამწის ბრუნვა ღერძის გარშემო მუდმივი სიჩქარით წარმტანი მოძრაობაა, ხოლო წრფივი მოძრაობა ისრის გასწვრივ – ფარდობითი. დამოკიდებულება M წერტილის x_1, y_1 აბსოლუტურ კოორდინატებსა და x, y ფარდობით კოორდინატებს შორის მოიცემა (13.1.8) ფორმულებით:

$$x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \qquad (\text{ა})$$

ჩვენ ამოცანაში $x = a\cos kt$, $y = 0$, $\varphi = kt$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (ა) ტოლობებში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1 = a\cos^2 kt, \\ y_1 = a\sin kt\cos kt. \end{cases} \qquad (\text{ბ})$$

გადავიდეთ r, φ პოლარულ კოორდინატებზე. (ბ)-დან

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{a^2\cos^4 kt + a^2\sin^2 kt\cos^2 kt} = a\cos kt, \qquad \varphi = kt \qquad =>$$

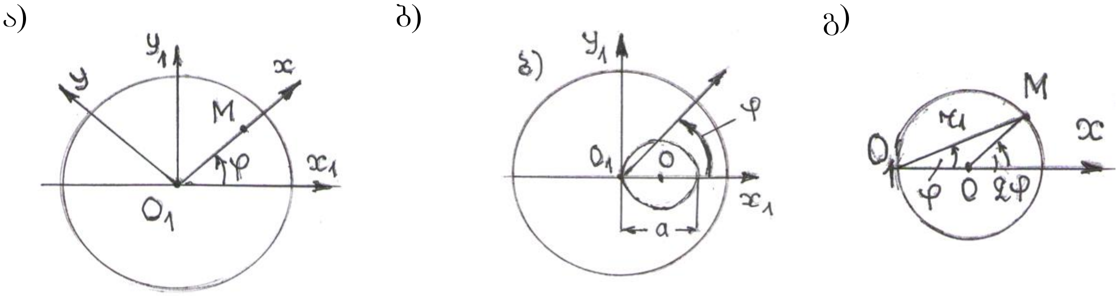
$$r_1 = a\cos\varphi. \qquad (\text{გ})$$

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ (გ) არის a დიამეტრის მქონე წრეწირის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში (ნახ. 13.7,ბ).

O_1x ისრის გასწვრივ ერთი სრული რხევის პერიოდი $T = 2\pi/k$.

T_1-ით აღვნიშნოთ დროის შუალედი, რომელიც M წერტილს სჭირდება აბსოლუტურ მოძრაობაში a დიამეტრის მქონე წრეწირის შემოწერისათვის. განვიხილოთ სამკუთხედი OO_1M (ნახ. 13.7,გ). მას ორი კუთხე ტოლი აქვს. $\angle MOx$ ამ სამკუთხედის გარე კუთხეა, ამიტომ $\angle MOx = 2\angle MO_1x = 2\varphi = 2kt$ => $T_1 = 2\pi/2k = \pi/k$ => $T = 2T_1$.

ა) ბ) გ)



ნახ. 13.7

მივიღეთ: რა დროშიც ურიკა აღწერს ერთ სრულ რხევას, იმავე დროში ის აბსოლუტურ მოძრაობაში ორჯერ შემოწერს a დიამეტრის მქონე წრეწირს.

პასუხი. $x_1 = a cos^2 kt$, $y_1 = a\sin kt\cos kt$; ტრაექტორია წრეწირი: $r_1 = a\cos\varphi$, $\varphi = kt$.

ამოცანა 13.6. ურიკა მიგორავს წრფივად $s = 2t$ კანონით. ურიკის მიმართ M წერტილის მოძრაობა მოცემულია $x_M = 3t$ და $y_M = 4t$ განტოლებებით. გაიგეთ M წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის სიჩქარე დროის t=1 წმ მომენტში (ნახ. 13.8).

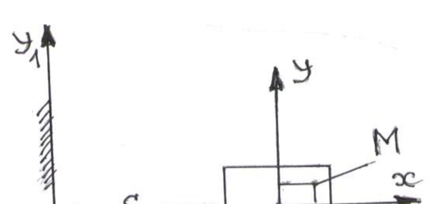
ამოხსნა. წარმტანი მოძრაობაა ურიკის მოძრაობა, რომელიც ბრტყელი და გადატანითია, ამიტომ M წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებები შეგვიძლია გავიგოთ (13.1.7) ფორმულებით: $x_1 = x_0 + x,$ $y_1 = y_0 + y$. ჩვენ შემთხვევაში $x_0 = s = 2t$, y_0 =0, $x = x_M = 3t$, $y = y_M = 4t$. მაშინ $x_1 = 2t + 3t = 5t$, $y_1 = 4t$ =>

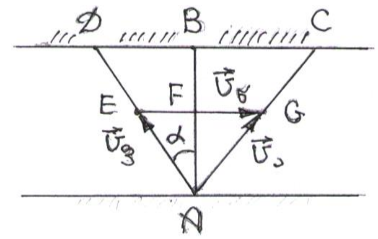
$$v_{\text{ა}x} = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}(5t) = 5, \quad v_{\text{ა}y} = \frac{dy_1}{dt} = \frac{d}{dt}(4t) = 4 \quad => \quad v_{\text{ა}} = \sqrt{v_{\text{ა}x}^2 + v_{\text{ა}y}^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}40.$$

პასუხი. 6.40.

ამოცანა 13.7. რა კუთხით უნდა იცურაოს მოცურავემ, რომ უმოკლეს დროში გადაცუროს მდინარე, რომლის სიჩქარეა $\vec{v}$, თუ მოცურავეს სიჩქარე მდგარ წყალში უდრის $\vec{u}$-ს (ნახ. 13.9)?

ამოხსნა. დავუშვათ, რომ მდინარის ნაპირები ერთმანეთის პარალელურია და AB არის უმოკლესი მანძილი მათ შორის, ხოლო AD ის მიმართულებაა, რომლის გასწვრივაც მიცურავს მოცურავე. C არის წერტილი, რომელშიც მოცურავე მიადგება მეორე ნაპირს. α არის საძიებელი კუთხე.





ნახ. 13.8

ნახ. 13.9

დინება არის მოძრავი სხეული. მის მიმართ, ე.ი. AD-ს გასწვრივ, მოძრაობა არის ფარდობითი მოძრაობა, ამიტომ $\vec{v}_ფ = \vec{u}$. მდინარეში წყლის მოძრაობა არის წარმტანი მოძრაობა, ამიტომ $\vec{v}_წ = \vec{v}$. AC-ს გასწვრივ მოძრაობა არის ამ ორი მოძრაობის შედეგი, ე.ი. აბსოლუტური მოძრაობა. სიჩქარეთა შეკრების კანონის თანახმად, $\vec{v}_ა = \vec{v}_ფ + \vec{v}_წ$. ნახ. 13-ზე გამოსახულია სიჩქარეთა სამკუთხედი. $\Delta ABC \sim \Delta AFG$ => $AC/AG = AB/AF$. მაგრამ $AG = v_ა$, $AF = v_ფ \cos\alpha$ => $AC/v_ა = AB/u\cos\alpha$. მაგრამ $AC/v_ა$ არის ის t დროის შუალედი, რომელიც სჭირდება მოცურავეს მდინარის გადასაცურად. მივიღეთ: $t = AB/u\cos\alpha$. ეს დრო იქნება უმცირესი, როცა $\cos\alpha = 1$ => α=0. ამგვარად, $t_{მინ} = AB/u$

მივიღეთ: უმოკლესი არის დროის ის შუალედი, რომელიც დასჭირდება მოცურავეს მეორე ნაპირამდე გასაცურად დამდგარ წყალში.

პასუხი. ნაპირის მართობულად.

საინტერესოა, რა როლი აქვს ამ ამოცანაში დინების სიჩქარეს?

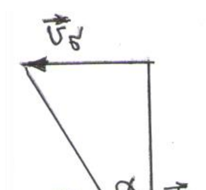
ამოცანა 13.8. გაიგეთ წვიმის დროს ქოლგის უხელსაყრელესი მდებარეობა, თუ ქოლგის დამჭერი ადამიანი მოძრაობს ჰორიზონტალური მიმართულებით u სიჩქარით, ხოლო წვიმის წვეთები ვარდება ვერტიკალურად v სიჩქარით. რას უდრის წვეთის ფარდობითი სიჩქარე, როცა v=2 მ/წმ და u=1,5 მ/წმ?

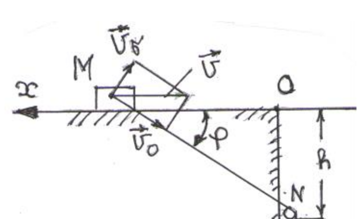
ამოხსნა. უძრავ ათვლის სხეულად მივიღოთ დედამიწა, ხოლო მოძრავ ათვლის სხეულად – ადამიანი. ვთქვათ, ადამიანი მიდის მარჯვნიდან მარცხნივ. წვეთის ვერტიკალურად ვარდნა წვეთისათვის არის აბსოლუტური მოძრაობა ($v_ა = v$); მისი მოძრაობა ადამიანის მიმართ – ფარდობითი მოძრაობაა, ხოლო ადამიანის მოძრაობა – წარმტანი ($v_წ = u$). როგორც ვხედავთ, გასაგებია ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარის მოდული და მიმართულება. სიჩქარეთა შეკრების თეორემის გამოყენებით ავაგოთ სიჩქარეთა სამკუთხედი (ნახ. 13.10).

ადვილად მივიღებთ: $v_ფ = \sqrt{v_ა^2 + v_წ^2} = \sqrt{v^2 + u^2}$, $tg\alpha = u/v$.

როცა v=2 მ/წმ და u=1,5 მ/წმ, მაშინ $v_ფ = \sqrt{1,5^2 + 2^2}$=2,5 მ/წმ, tga=2/1,5=1,(3) => $\alpha \approx 53^\circ$.

პასუხი. $v_ფ = \sqrt{v^2 + u^2}$ (2,5 მ/წმ); $\alpha = arctg(u/v)$ ($\alpha \approx 53^\circ$).





ნახ. 13.10 ნახ. 13.11

ამოცანა 13.9. M ცოციას შეუძლია გადაადგიილდეს Ox ღერძის გასწვრივ. მას ამოძრავებს უძრავ ბლოკზე გადადებული MN ძაფი (ნახ. 13.11). ძაფის N ბოლოს ანიჭებენ $\vec{v}_0$ სიჩქარეს. განსაზღვრეთ M ცოციას $\vec{v}$ სიჩქარე იმ მომენტში, როცა $\angle OMN = \varphi$ და $ON = h$.

ამოხსნა. ცოციას გადაადგილება Ox ღერძის გასწვრივ არის მისი აბსოლუტური მოძრაობა, ე.ი. $\vec{v}_ა = \vec{v}$. ეს მოძრაობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ორი მოძრაობის ჯამი: ერთია მოძრაობა MN წრფის გასწვრივ (ფარდობითი მოძრაობა $\vec{v}_0$ სიჩქარით), ხოლო მეორე - N ბლოკის გარშემო ძაფის ბრუნვა (წარმტანი მოძრაობა $\vec{v}_წ$ სიჩქარით). ამგვარად, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_წ$. ამ ტოლობის თანახმად, სიჩქარეთა სამკუთხედი იქნება მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზა არის საძიებელი $\vec{v}$ სიჩქარე. ადვილად მივიღებთ: $v = v_0 / \cos\varphi$.

პასუხი. $v = v_0 / \cos\varphi$.

ამოცანა 13.10. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმში $OA = r$ სიგრძის მრუდმხარა ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.12). AB ბარბაცას სიგრძე უდრის l-ს. მოცემული φ კუთხისას განსაზღვრეთ B ცოციას სიჩქარე OA მრუდმხარას მიმართ. გაიგეთ, აგრეთვე, მისი აბსოლუტური სიჩქარე.

ამოხსნა. B წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის ცოციას და ბარბაცას და, რადგანაც ცოცია მოძრაობს გადატანით, ამიტომ მის ყველა წერტილს აქვს B წერტილის სიჩქარე. ამგვარად, ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ბარბაცას B წერტილის სიჩქარის გაგებაზე.

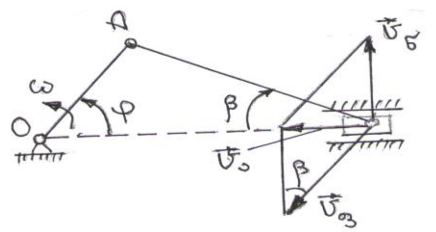
ცხადია, B წერტილის აბსოლუტური მოძრაობა არის მისი მოძრაობა OB წრფის გასწვრივ და $\vec{v}_ა$ ვექტორი მიმართულია B-დან A-სკენ.

თუ მრუდმხარას გავაჩერებთ, მაშინ ბარბაცას შეეძლება მხოლოდ ბრუნვა A წერტილის გარშემო, რაც მისი ფარდობითი მოძრაობაა. ამ შემთხვევაში B წერტილი იმოძრავებს AB-რადიუსიან წრეწირზე, რის გამოც $\vec{v}_ფ$ სიჩქარე არის AB-ს მართობი (ნახ. 13.12).

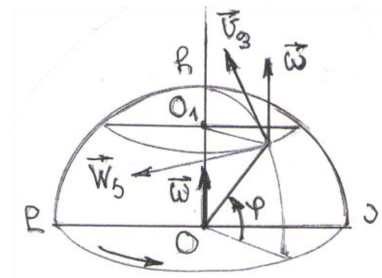
დავუშვათ, რომ OAB გამყარდა, მაშინ მას შეეძლება მხოლოდ ბრუნვა O წერტილის გარშემო (ეს არის წარმტანი მოძრაობა), რის შედეგადაც B წერტილი იმოძრავებს OB რადიუსიან წრეწირზე $v_B = v_წ = \omega \cdot OB = \dot{\varphi} \cdot OB$ და $\vec{v}_B = \vec{v}_წ \perp OB$. ნახ. 13.12-

დან $\quad OB = OA\cos\varphi + AB\cos\beta = r\cos\varphi + l\cos\beta; \quad r\sin\varphi = l\sin\beta \quad => \quad \sin\beta = \dfrac{r}{l}\sin\varphi \quad =>$

$$\cos\beta = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi} \quad => \quad v_გ = \omega\left(r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\right).$$



ნახ. 13.12



ნახ. 13.13

$\vec{v}_ა, \vec{v}_ფ$ და $\vec{v}_გ$ ვექტორებით ავაგოთ პარალელოგრამი (ნახ. 13.12). ამ პარალე-ლოგრამში ცნობილია $\vec{v}_გ$ და დანარჩენი ორი ვექტორის მიმართულებები. ადვილად მივიღებთ: $v_ფ = v_გ / \cos\beta = \dfrac{\omega\left(r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\right)}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} = \omega l\left(1 + \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right).$

ეს არის ცოციას სიჩქარე მრუდმხარას მიმართ.

$$v_ა = v_ფ\sin\beta = \omega r\sin\varphi\left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right).$$

პასუხი. $v_ფ = \omega l\left(1 + \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right); \quad v_ა = \omega r\sin\varphi\left(1 + \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right).$

ამოცანა 13.11. ურიკა მიგორავს წრფივად $s_გ = 0,5t^3$ კანონით. ურიკის მიმართ M წერტილის მოძრაობა მოცემულია $x_M = 0,3t$ და $y_M = 0,1t^2$ განტოლებებით. გაიგეთ M წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის აჩქარება დროის t=1 წმ მომენტში (ნახ. 13.8).

ამოხსნა. წარმტანი მოძრაობაა ურიკის მოძრაობა, რომელიც ბრტყელი და გა-დატანითია, ამიტომ M წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებები შეგვიძ-ლია გავიგოთ (13.1.7) ფორმულებით: $x_1 = x_0 + x$, $y_1 = y_0 + y$. ჩვენ შემთხვევაში $x_0 = s_გ = 0,5t^3$, y_0=0, $x = x_M = 0,3t$, $y = y_M = 0,1t^2$. მაშინ $x_1 = 0,5t^3 + 0,3t = 5t$, $y_1 = 0,1t^2$ =>

$$w_{აx} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(0,5t^3 + 0,3t\right) = 3t, \qquad w_{აy} = \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(0,1t^2\right) = 0,2 \qquad => \qquad w_ა = \sqrt{w_{აx}^2 + w_{აy}^2} =$$

$= \sqrt{(3t)^2 + 0,2^2} = \sqrt{9t^2 + 0,04}.$ როცა t=1 წმ-ს, მაშინ $w_ა = \sqrt{9,02} \approx 3,0066$ მ/წმ^2.

პასუხი. $\approx 3,0066$ მ/წმ^2.

ამოცანა 13.12. M წერტილის ფარდობითი მოძრაობა განისაზღვრება $x_{ფ}=e^t$, $y_{ფ}=2\sin t$ განტოლებებით, ხოლო წარმტანი გადატანითი მოძრაობა - $x_{წ}=e^{-t}$, $y_{წ}=2\cos t$ განტოლებებით. აბსოლუტური და ფარდობითი მოძრაობების ღერძები ერთმანეთის პარალელურია. განსაზღვრეთ M წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის აჩქარების მოდული დროის $t=0$ მომენტში.

ამოხსნა. წინა ამოცანის მსგავსად მივიღებთ, რომ $x_1=e^t+e^{-t}$, $y_1=2\sin t+2\cos t$ => $w_{ax}=\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\dfrac{d^2}{dt^2}\left(e^t+e^{-t}\right)=e^t+e^{-t}$, $w_{ay}=\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=\dfrac{d^2}{dt^2}\left(2\sin t+2\cos t\right)=-2\sin t-\cos t$. როცა $t=0$, მაშინ $w_{ax}=2$, $w_{ay}=2$ => $w_a=\sqrt{w_{ax}^2+w_{ay}^2}=\sqrt{8}\approx 2,83$.

პასუხი. $\approx 2,83$.

ამოცანა 13.13. ჩრდილოეთისაკენ სამხრეთის რკინიგზის მაგისტრალი პირდაპირ მერიდიანზე გადის. თბომავალი მოძრაობს ჩრდილოეთისკენ $v=90$ კმ/სთ სიჩქარით. ადგილის განედი $\varphi=47^\circ$-ს (ნახ. 13.13). განსაზღვრეთ თბომავლის კორიოლისის აჩქარება. [64]

ამოხსნა. სხეული განვიხილოთ M წერტილად. ვინაიდან დედამიწა ბრუნავს დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ, ამიტომ დადებითი ბრუნვის მისაღებად დედამიწის ბრუნვის $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე უნდა მივმართოთ სამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ.

სხეულის მერიდიანზე მოძრაობისას $\vec{v}_{ფ}$ და $\vec{\omega}$ ვექტორები მერიდიანის სიბრტყეში მდებარეობენ. ცნობილია, რომ $\vec{w}_{კ}=2\vec{\omega}\times\vec{v}_{ფ}$. ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად, $\vec{w}_{კ}$ მიმართული იქნება აღმოსავლეთიდან დასავლეთისაკენ (თუ გავიხედებით $\vec{w}_{კ}$-ს წვეროდან მისი ბოლოსკენ, მაშინ $\vec{\omega}$ ვექტორის $\vec{v}_{ფ}$ ვექტორთან შეთავსების მიზნით მობრუნება უნდა ხდებოდეს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ანუ $\vec{\omega},\vec{v}_{ფ}$ და $\vec{w}_{კ}$ ვექტორები უნდა ადგენდნენ მარჯვენა სისტემას). ადვილად გავიგებთ, რომ კუთხე $\vec{\omega}$ და $\vec{v}_{ფ}$ ვექტორებს შორის 47°-ია, ხოლო 90 კმ/სთ=25 მ/წმ. მაშინ $w_{კ}=2\omega v_{ფ}\sin 47^\circ\approx 2\cdot 7,3\cdot 10^{-5}\cdot 20\cdot 0,7314\approx 2,67\cdot 10^{-3}$ მ/წმ^2.

პასუხი. $\approx 2,67\cdot 10^{-3}$ მ/წმ^2.

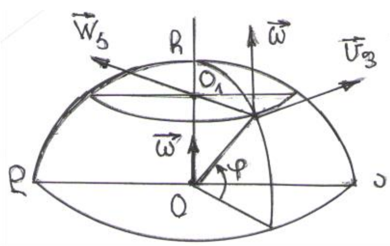
ამოცანა 13.14. ჩრდილოეთი განედის პარალელზე დაგებული რკინიგზის ლიანდაგზე დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ $v=20$ მ/წმ სიჩქარით მოძრაობს თბომავალი (ნახ. 13.14). განსაზღვრეთ თბომავლის კორიოლისის აჩქარება.

ამოხსნა. წინა ამოცანის მსგავსად, სხეული მივიღოთ M წერტილად. ვინაიდან დედამიწა ბრუნავს დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ, ამიტომ დადებითი ბრუნვის მისაღებად დედამიწის ბრუნვის $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე უნდა მივმართოთ ხამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ.

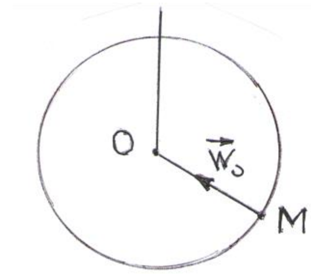
$\vec{w}_{კ}$-ის მოდულისა და მიმართულების გასაგებად გამოვიყენოთ ჟუკოვსკის წესი: 1. დავაგეგმილოთ $\vec{v}_{ფ}$ ვექტორი $\vec{\omega}$-ს მართობ სიბრტყეში; ჩვენ შემთხვევაში $\vec{v}_{ფ}$ ვექტორი უკვე მდებარეობს $\vec{\omega}$-ს მართობ სიბრტყეში; 2. გეგმილს გავამრავლებთ 2ω-ზე;

ჩვენ შემთხვევაში მივიღებთ $2\omega\vec{v}_ფ$ ვექტორს; 3. მიღებული ვექტორი მოვაბრუნოთ 90°-იანი კუთხით წარმტანი მოძრაობის ბრუნვის მხარეს. ჩვენ შემთხვევაში $\vec{w}_კ$ ვექტორი მიმართულია MO_1 წრფის მიმართულებით და მისი მოდული უდრის $2\cdot7{,}3\cdot10^{-5}\cdot20\approx$ $\approx2{,}92\cdot10^{-3}$ მ/წმ^2-ს.

პასუხი. $2{,}92\cdot10^{-3}$ მ/წმ^2.



ნახ. 13.14



ნახ. 13.15

ამოცანა 13.15. R რადიუსის წრეწირი მუდმივი სიჩქარით გადატანით მოძრაობს ისე, რომ მისი ცენტრი გადაადგილდება წრეწირის სიბრტყის მართობი წრფის გასწვრივ. ამავე დროს წრეწირის გასწვრივ მოძრაობს M წერტილი ისე, რომ OM ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. გაიგეთ M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება (ნახ. 13.15).

ამოხსნა. წარმტანი მოძრაობაა წრეწირის გადატანითი მოძრაობა. M წერტილის ფარდობითი მოძრაობა არის მისი მოძრაობა R-რადიუსიან წრეწირზე. ვინაიდან წრეწირი მოძრაობს გადატანით მუდმივი სიჩქარით, ამიტომ $w_წ$=0 და $w_კ$=0 => $\vec{w}_ა=\vec{w}_ფ$; $w_{ფ\tau}$=0 ($\omega=const$) => $w_ა=w_{ფn}=R\omega^2$.

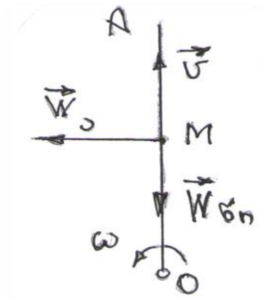
პასუხი. $R\omega^2$. აჩქარება მიმართულია რადიუსის გასწვრივ წრეწირის ცენტრისკენ.

ამოცანა 13.16. OA წრფის გასწვრივ O ცენტრიდან მუდმივი v სიჩქარით მოძრაობს M წერტილი (ნახ.13.16); თვით წრფე მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით ბრუნავს O ცენტრის გარშემო. განსაზღვრეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აჩქარება იმ მომენტში, როცა OM მანძილი უდრის R-ს.

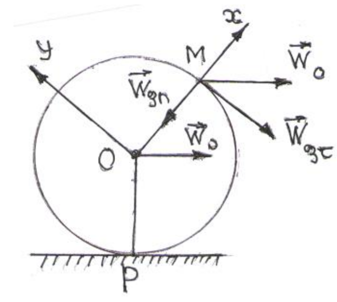
ამოხსნა. წარმტანი მოძრაობა არის OA წრფის ბრუნვა O ცენტრის გარშემო, ხოლო M წერტილის ფარდობითი მოძრაობა – გადაადგილება OA წრფის გასწვრივ. ამოცანის პირობის თანახმად, გვაქვს: $v_წ=\omega R$, $v_ფ=v$ და მათ შორის კუთხე უდრის 90°-ს => $v_ა=\sqrt{v^2+R^2\omega^2}$.

გადავიდეთ აჩქარების გაგებაზე. ვინაიდან ფარდობითი მოძრაობა წრფივია მუდმივი სიჩქარით, ამიტომ $w_ფ$=0 => $\vec{w}_ა=\vec{w}_წ+\vec{w}_კ$. წრფე ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით, ამიტომ $w_{წ\tau}$=0 და $w_{წn}=R\omega^2$. რადგანაც წერტილი მოძრაობს ბრუნვის ღერძის

მართობ სიბრტყეში, ამიტომ $w_კ = 2\omega v_ფ = 2\omega v$. ადვილად დავადგენთ, რომ $\vec{w}_კ$ მართობია OA წრფის. ვინაიდან $\vec{w}_{წn}$-ს აქვს MA მიმართულება, ამიტომ



ნახ. 13.16



ნახ. 13.17

$$w_ა = \sqrt{w_{წn}^2 + w_კ^2} = \sqrt{R^2\omega^4 + 4\omega^2 v^2} = \omega\sqrt{R^2\omega^2 + 4v^2}\ .$$

პასუხი. $v_ა = \sqrt{v^2 + R^2\omega^2}$, $w_ა = \omega\sqrt{R^2\omega^2 + 4v^2}$.

ამოცანა 13.17. R=0,5 მ რადიუსის თვალი უსრიალოდ გორავს წრფივი რელსის გასწვრივ (ნახ. 13.17). დროის რაღაც მომენტში O ცენტრის სიჩქარე v_0=4 მ/წმ, ხოლო აჩქარება - w_0=2 მ/წმ^2. განსაზღვრეთ თვალის M წერტილის აჩქარება, თუ მოცემულ მომენტში კუთხე MOP უდრის 120°-ს. [44]

ამოხსნა. თვალის მოძაობა დავშალოთ ორ მოძრაობად: O ცენტრის გარშემო ბრუნვად და თვალის, როგორ მთლიანი სხეულის, გადატანით მოძრაობად. ფარდობით მოძრაობად მივიღოთ თვალის ბრუნვა O ცენტრის გარშემო, ხოლო წარმტან მოძრაობად - გადატანითი მოძრაობა, ე.ი. $\vec{v}_{Mწ} = \vec{v}_0$ და $\vec{w}_{Mწ} = \vec{w}_0$.

პირობის თანახმად, თვალი უსრიალოდ გორავს, ამიტომ რელსთან შეხების P წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია, ე.ი. P წერტილი არის თვალის წერტილების სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. მაშინ $v_0 = \omega R$ => $\omega = \dfrac{v_0}{R}$ => $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_0}{R}\right) = \dfrac{1}{R}\dfrac{d}{dt}(v_0) =$ $= \dfrac{w_0}{R}$. ამგვარად, გავიგეთ თვალის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება.

ახლა განვსაზღვროთ M წერტილის ფარდობითი აჩქარება. $w_{ფ\tau} = \varepsilon R = \dfrac{w_0}{R}R =$ $= w_0$; $w_{ფn} = \omega^2 R = \dfrac{v_0^2}{R^2}R = \dfrac{v_0^2}{R}$.

M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება $\vec{w}_ა = \vec{w}_წ + \vec{w}_{ფ\tau} + \vec{w}_{ფn}$.   (ა)

გამოვიყენოთ გეგმილების მეთოდი. კოორდინატთა ღერძები შევარჩიოთ ისე, როგორც ეს ნახ. 13.17-ზეა. მაშინ

$$w_{ აx} = w_წ \cos 30^\circ - w_{ფn} = w_0 \cos 30^\circ - \frac{v_0^2}{R} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4^2}{0,5} \approx 1,73 - 32 = -30,27 \ \text{მ/წმ}^2;$$

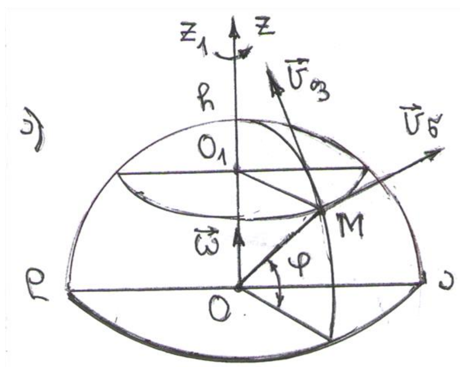
$$w_{აy} = -w_{წ}\sin 30^\circ - w_{ფ\tau} = -w_0\sin 30^\circ - w_0 = -2\cdot\frac{1}{2} - 2 = -3 \ \text{მ/წმ}^2 \qquad =>$$

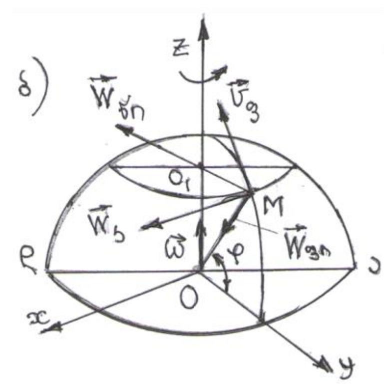
$$w_{ა} = \sqrt{(-30,27)^2 + 3^2} \approx \sqrt{925,27} \approx 30,42 \ \text{მ/წმ}^2 .$$

პასუხი. $w_{ა} \approx 30,42$ მ/წმ^2.

ამოცანა 13.18. სხეული მოძრაობს მერიდიანის გასწვრივ სამხრეთიდან ჩრდილოეთისკენ გადატანით მუდმივი მოდულის მქონე $v_{ფ} = u$ სიჩქარით (ნახ. 13.18). განსაზღვრეთ სხეულის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება, როცა ის იმყოფება ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში φ განედზე, თუ დავუშვებთ, რომ დედამიწის კუთხური სიჩქარე მუდმივია და უდრის ω-ს. დედამიწის რადიუსი უდრის R-ს.

ამოხსნა. სხეული განვიხილოთ M წერტილად. ვინაიდან დედამიწა ბრუნავს დასავლეთიოან აღმოსავლეთისაკენ, ამიტომ დადებითი ბრუნვის მისაღებად დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე უნდა მივმართოთ ხამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ.

ა) 

ბ) 

ნახ. 13.18

წარმტანი მოძრაობაა დედამიწის ბრუნვა თავისი ღერძის გარშემო, რის შედეგად M წერტილი $v_{წ} = \omega\cdot O_1M = \omega\cdot OM\cos\varphi = R\omega\cos\varphi$ მოდულის მქონე სიჩქარით მოძრაობს O_1M-რადიუსიან წრეწირზე, ხოლო ფარდობითი – მისი მოძრაობაა მერიდიანის გასწვრივ $\vec{v}_{ფ} = \vec{u}$ სიჩქარით. კუთხე ამ სიჩქარეებს შორის მართია, ამიტომ სიჩქარეთა შეკრების თანახმად $v_{ა} = \sqrt{v_{ფ}^2 + v_{წ}^2} = \sqrt{u^2 + R^2\omega^2\cos^2\varphi}$.

გადავიდეთ აჩქარების გამოთვლაზე.

ფარდობითი სიჩქარე მუდმივია, ამიტომ $w_{ფ\tau}$=0. მაშინ $\vec{w}_{ფ}$ აჩქარების მოდული $w_{ფ} = w_{ფn} = \dfrac{v_{ფ}^2}{R} = \dfrac{u^2}{R}$ და მიმართულია O ცენტრისაკენ.

დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე მუდმივია, ამიტომ $w_{წ\tau}$=0. მაშინ $\vec{w}_{წ}$ აჩქარების მოდული $w_{წ} = w_{წn} = \omega^2\cdot O_1M = R\omega^2\cos\varphi$ და მიმართულია O_1 ცენტრისაკენ.

$\vec{w}_{კ}$ აჩქარების მოდული $w_{კ} = 2v_{ფ}\omega\sin\varphi = 2u\omega\sin\varphi$ და მერიდიანის მართობია (იხ. ამოცანა 13.13).

მივიღეთ: $\vec{w}_ა = \vec{w}_{ფn} + \vec{w}_{წn} + \vec{w}_კ .$ (ა)

გამოვიყენოთ გეგმილების მეთოდი. დავაგეგმილოთ (ა) ტოლობა ნახ. 13.18-ზე მოცემულ *Ox, Oy* და *Oz* ღერძებზე, მივიღებთ:

$$w_{ax} = w_კ = 2u\omega\sin\varphi ,$$

$$w_{ay} = -w_{წn} - w_{ფn}\cos\varphi = -R\omega^2\cos\varphi - \frac{u^2}{R}\cos\varphi = -\left(R\omega^2 + \frac{u^2}{R}\right)\cos\varphi ,$$

$$w_{az} = -w_{ფn}\sin\varphi = -\frac{u^2}{R}\sin\varphi \quad =>$$

$$w_ა = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2} = \sqrt{4u^2\sin^2\varphi + \left(R\omega^2 + \frac{u^2}{R}\right)^2\cos^2\varphi + \frac{u^4}{R^2}\sin^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{\left(4u^2\omega^2 + \frac{u^4}{R^2}\right)\sin^2\varphi + \left(R\omega^2 + \frac{u^2}{R}\right)\cos^2\varphi} .$$

ვიცით რა ვექტორის მოდული და გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე, ადვილად გავიგებთ ვექტორის მიმართულებას.

პასუხი. $v_ა = \sqrt{u^2 + R^2\omega^2\cos^2\varphi}$, $w_ა = \sqrt{\left(4u^2\omega^2 + \frac{u^4}{R^2}\right)\sin^2\varphi + \left(R\omega^2 + \frac{u^2}{R}\right)\cos^2\varphi}$.

XIV თავი

მყარი სხეულის რთული მოძრაობა

14.1. შედგენილი მოძრაობის ცნება

ვიხილავთ სხეულის მოძრაობას *Oxyz* სისტემის მიმართ, რომელიც თავის მხრივ მოძრაობს უძრავი $O_1x_1y_1z_1$ სისტემის მიმართ.

განსაზღვრა. სხეულის მოძრაობას მოძრავი სისტემის მიმართ, **ფარდობითი მოძრაობა** ეწოდება, ხოლო უძრავი სისტემის მიმართ – **რთული** ანუ **აბსოლუტური.** სხეულის მოძრაობას იმ შემთხვევაში, როცა ის უძრავია მოძრავი სისტემის მიმართ, **წარმტანი მოძრაობა** ეწოდება. რთულ მოძრაობას **შედგენილ მოძრაობასაც** უწოდებენ, ხოლო ფარდობითსა და წარმტანს – **შემდგენ მოძრაობებს.**

სხეულის მოძრაობის კინემატიკური მახასიათებლებიდან შემოვიფარგლებით მხოლოდ სიჩქარეების განსაზღვრით.

14.2. გადატანითი მოძრაობების შეკრება

ვაჩვენოთ, რომ როცა სხეულის ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები გადატანითია, მაშინ აბსოლუტური მოძრაობაც გადატანითია.

ვთქვათ, $\vec{v}_1$ და $\vec{v}_2$ სხეულის ნებისმიერი წერტილის ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეებია. სიჩქარეთა შეკრების კანონის თანხმად (იხ. §13.2), წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე იქნება

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \qquad (14.2.1)$$

მაგრამ გადატანითი მოძრაობის დროს სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი $\vec{v}_1$ და $\vec{v}_2$ სიჩქარეები აქვს, ამიტომ მათი ჯამიც (ე.ი. აბსოლუტური სიჩქარეები) ერთნაირი იქნება. წარმტანი გადატანითი მოძრაობის დროს $\vec{w}_{\text{კ}} = 0$ (იხ. §13.4), ამიტომ აჩქარებათა შეკრების კანონის თანახმად, სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი აბსოლუტური აჩქარებები აქვს, ე.ი.

$$\vec{w} = \vec{w}_{\text{გ}} + \vec{w}_{\text{ფ}}. \qquad (14.2.2)$$

მივიღეთ: ორი გადატანითი მოძრაობის შეკრებით მიღებული მოძრაობაც გადატანითია.

დამტკიცებული თეორემა შეგვიძლია განვაზოგადოთ ორზე მეტი გადატანითი მოძრაობის შეკრებაზეც.

14.3. პარალელური ღერძების გარშემო ბრუნთა შეკრება. ბრუნთა წყვილი

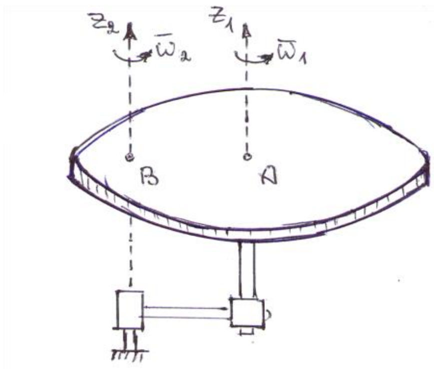
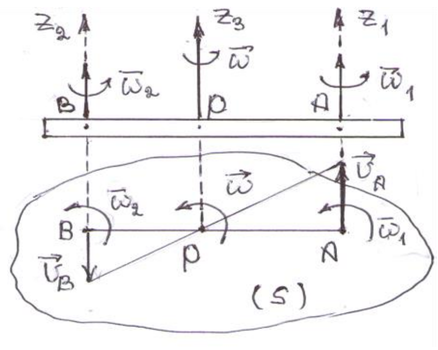
განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სხეულის ფარდობითი მოძრაობა არის ბრუნვა O_1z_1 ღერძის გარშემო $\vec{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით, ხოლო წარმტანი - O_1z_1 ღერძის ბრუნვა მისი პარალელური O_2z_2 ღერძის გარშემო $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 14.1). თუ გავიხსენებთ სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განსაზღვრას, დავრწმუნდებით, რომ ჩვენ შემთხვევაში შედგენილი მოძრაობა წარმოდგენს ბრტყელ მოძრაობას ღერძების მართობ სიბრტყეში. შესაძლებელია სამი კერძო შემთხვევა.

1. ბრუნვები მიმართულია ერთ მხარეს. გავკვეთოთ სხეული ღერძების მართობი სიბრტყით და ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ A და B ასოებით. A წერტილის $\vec{v}_A$ სიჩქარე განპირობებულია მხოლოდ O_2z_2 ღერძის გარშემო ბრუნვით, ამიტომ $v_A = \omega_2 \cdot AB$. ასევე, B წერტილის $\vec{v}_B$ სიჩქარე განპირობებულია მხოლოდ O_1z_1 ღერძის გარშემო ბრუნვით, ამიტომ $v_B = \omega_1 \cdot AB$. $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$ სიჩქარეები ერთმანეთის პარალელური (ორივე AB მონაკვეთის მართობია) და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია (ნახ. 14.1). ცხადია, A და B წერტილებს შორის არსებობს წერტილი, რომლის სიჩქარე ნულის ტოლია, ე.ი. არსებობს P სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ასევე ცხადია, რომ O_1z_1 და O_2z_2 ღერძების პარალელური Pz_3 ღერძი არის სხეულის ბრუნვის მყისი ღერძი.

სხეულის აბსოლუტური მოძრაობის კუთხური სიჩქარე აღვნიშნოთ $\vec{\omega}$-თი და თუ გავითვალისწინებთ (10.6.6) ფორმულას, გვექნება:

$$v_A = \omega \cdot AP, \;\; v_B = \omega \cdot BP \;\; \Rightarrow v_A + v_B = \omega\left(AP + BP\right);$$

$$\omega = \frac{v_A}{AP}, \;\; \omega = \frac{v_B}{BP} \quad \Rightarrow \;\; \omega = \frac{v_A + v_B}{AP + BP}, \;\; \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

ა)  ბ) 

ნახ. 14.1

გავიხსენოთ, რომ $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$, $AP + BP = AB$ და მივიღებთ:

$$\omega = \frac{\omega_2 \cdot AB + \omega_1 \cdot AB}{AB}, \quad \omega = \frac{\omega_2 \cdot AB}{AP} = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BP} \quad =>$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \tag{14.3.1}$$

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BP} = \frac{\omega_2}{AP}. \tag{14.3.2}$$

მივიღეთ: როცა სხეული ორი პარალელური ღერძის გარშემო ერთი მიმართულებით ერთდროულად ბრუნავს $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარეებით, მაშინ შედგენილი მოძრაობა წარმოადგენს მყის ბრუნვას $\omega = \omega_1 + \omega_2$ აბსოლუტური კუთხური სიჩქარით მოცემული ღერძების იმ პარალელური ღერძის გარშემო, რომლის მდებარეობა (14.3.2) ფორმულით განისაზღვრება.

Pz_3 ბრუნვის მყისი ღერძი დროის მიხედვით იცვლის მდებარეობას და ცილინდრულ ზედაპირს შემოწერს.

სხეულის ნებისმიერი C წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის გასაგებად გამოვიყენოთ (9.5.3) ფორმულა:

$$\vec{v} = \vec{M}_C(\vec{\omega}). \tag{14.3.3}$$

(14.3.1) ფორმულის გათვალისწინებით

$$\vec{v} = \vec{M}_C(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) = \vec{M}_C(\vec{\omega}_1) + \vec{M}_C(\vec{\omega}_2). \tag{14.3.4}$$

ამგვარად, როცა სხეული ორი პარალელური ღერძის გარშემო ერთდროულად ბრუნავს ერთი მიმართულებით, მაშინ სხეულის ნებისმიერი C წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე ტოლია C წერტილის მიმართ კუთხური სიჩქარეების ვექტორული მომენტების ჯამისა.

ჩამოყალიბებული დებულების განზოგადება შეიძლება იმ შემთხვევაშიც, როცა სხეული ერთდროულად ბრუნავს ორზე მეტი პარალელური ღერძის გარშემო.

2. ბრუნვები მიმართულია სხვადასხვა მხარეს. გავკვეთოთ სხეული ღერძების მართობი სიბრტყით და ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ A და B ასოებით (ნახ. 14.2). პირველი შემთხვევის მსგავსად $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$. დავუშვათ, რომ $\omega_1 > \omega_2$, მაშინ $v_B > v_A$. ამასთან, $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$ ვექტორები პარალელურია და ერთ

მხარესაა მიმართული. ამიტომ კვეთაში მიღებული (S) ბრტყელი ფიგურის სიჩქარეთა მყის ცენტრს წარმოადგენს $\vec{v}_A$ და $\vec{v}_B$ ვექტორების ბოლოებზე გამავალი წრფისა და AB მონაკვეთის გაგრძელების გადაკვეთის P წერტილი, ხოლო Pz_3 ღერძი, რომელიც პარალელურია მოცემული ღერძებისა - ბრუნვის მყის ღერძს.

ავღნიშნოთ სხეულის აბსოლუტური მოძრაობის კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$-თი, მაშინ

$$v_A = \omega \cdot AP, \;\; v_B = \omega \cdot BP \;\; => v_B - v_A = \omega\left(BP - AP\right);$$

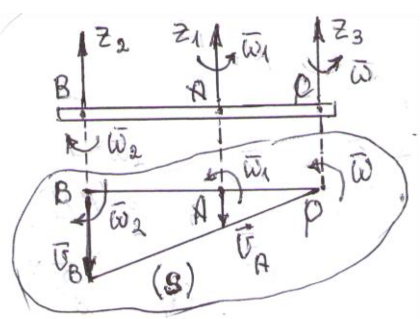
$$\omega = \frac{v_A}{AP}, \;\; \omega = \frac{v_B}{BP} \quad => \;\; \omega = \frac{v_A + v_B}{BP - AP}, \;\; \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

აქ შევიტანოთ v_A და v_B-ს მნიშვნელობები და გავითვალისწინოთ, რომ $BP - AP = AB$, მივიღებთ:

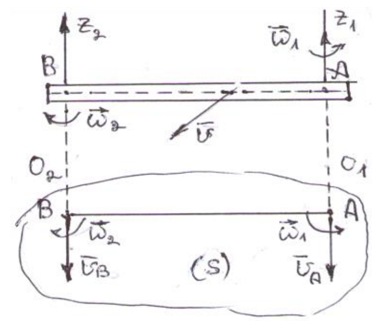
$$\omega = \frac{\omega_1 \cdot AB - \omega_2 \cdot AB}{AB}, \;\; \omega = \frac{\omega_2 \cdot AB}{AP} = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BP} \;\; =>$$

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \tag{14.3.5}$$

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BP} = \frac{\omega_2}{AP}. \tag{14.3.6}$$



ნახ. 14.2



ნახ. 14.3

ბოლო ორი ფორმულიდან პირველი გვაძლევს შედგენილი მოძრაობის კუთხურ სიჩქარეს, ხოლო მეორე – ბრუნვის მყისი ღერძის მდებარეობას.

პირველი შემთხვევის მსგავსად მივიღებთ, რომ სხეულის ნებისმიერი C წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე

$$\vec{v} = \vec{M}_C\left(\vec{\omega}_1\right) - \vec{M}_C\left(\vec{\omega}_2\right). \tag{14.3.7}$$

3. ბრუნთა წყვილი. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ბრუნვები ხდება სხვადასხვა მხარეს და $\omega_1 = \omega_2$ (ნახ. 14.3). ბრუნვათა ასეთ ერთობლიობას **ბრუნთა წყვილი** ეწოდება, ხოლო $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორებს – **კუთხურ სიჩქარეთა წყვილი.**

ამ შემთხვევაში $v_A = \omega_1 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$ => $v_B = v_A$, ამიტომ კვეთაში მიღებული (S) ბრტყელი ფიგურის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს უსასრულობაში და სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი $v_A = \omega_1 \cdot AB$ სიჩქარე აქვს.

მივიღეთ: ბრუნვათა წყვილის შედგენილი მოძრაობა წარმოადგენს მყის გადატანით მოძრაობას $v_A = \omega_1 \cdot AB$ სიჩქარით, რომლის ვექტორიც $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობია.

გავავლოთ პარალელი სტატიკაში წყვილძალის მომენტთან: ბრუნთა წყვილის შედგენილი მოძრაობის $\vec{v}$ სიჩქარე ზუსტად ისეა მიმართული, როგორც წყვილძალის ვექტორული მომენტი. ამგვარად, ბრუნთა წყვილი ტოლფასია მყისი გადატანითი მოძრაობისა, რომლის სიჩქარე კუთხურ სიჩქარეთა წყვილის მომენტის ტოლია. ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებასაც: მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა ტოლფასია ისეთი ბრუნთა წყვილისა, რომლის კუთხურ სიჩქარეთა წყვილის მომენტი გადატანითი მოძრაობის სიჩქარის ტოლია.

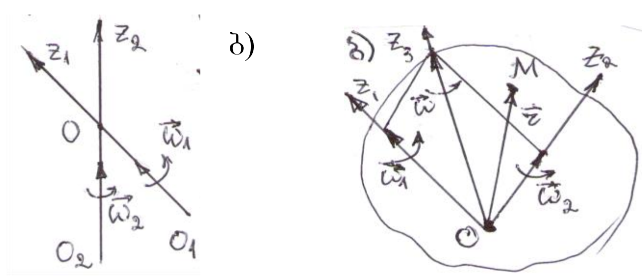
14.4. ერთ წერტილში გადამკვეთი ღერძების გარშემო ბრუნვათა შეკრება

ვთქვათ, სხეულის ფარდობითი მოძრაობა არის ბრუნვა $\vec{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით რაიმე O_1z_1 ღერძის გარშემო, ხოლო წარმტანი – ბრუნვა $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით O_1z_1 ღერძის გადამკვეთი O_2z_2 ღერძის გარშემო (ნახ. 14.4,ა). ღერძების გადაკვეთის O წერტილი უძრავია და სხეულის შედგენილი მოძრაობა არის სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო. ამიტომ სხეულს დროის მოცემულ მომენტში აქვს $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე, რომელიც მიმართულია O წერტილზე გამავალი ბრუნვის მყისი ღერძის გასწვრივ (§§11.4, 11.5) (ნახ. 14.4,ბ).

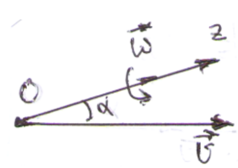
გამოვთვალოთ $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე. ამისათვის განვსაზღვროთ სხეულის რომელიმე M წერტილის სიჩქარე. ცხადია, რომ $\vec{v}_{ფ} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}$, $\vec{v}_{წ} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$ და სიჩქარეთა შეკრების თეორემის თანახმად,

$$\vec{v}_{ა} = \vec{v}_{ფ} + \vec{v}_{წ} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = \left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right) \times \vec{r} \,. \qquad (14.4.1)$$

ა) ბ)



ნახ. 14.4



ნახ. 14.5

მეორე მხრივ, შედგენილი მოძრაობა არის ბრუნვა ბრუნვის მყისი ღერძის გარშემო $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით, ამიტომ

$$\vec{v}_{ა} = \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \qquad (14.4.2)$$

ბოლო ორი ტოლობა გვაძლევს:

$$\left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right) \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \qquad (14.4.3)$$

მაგრამ M წერტილი არჩეულია ნებისმიერად, ამიტომ $\vec{r} \neq 0$, მაშინ (14.4.3)-დან გამომდინარეობს:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 . \qquad (14.4.4)$$

მივიღეთ: O წერტილზე გადამკვეთ ორი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვით შედგენილი მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ბრუნვა O წერტილზე გამავალი ბრუნვის მყისი ღერძის გარშემო, რომლის კუთხური სიჩქარე შემადგენელი ბრუნვების კუთხური სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამის ტოლია. Oz_3 ბრუნვის მყისი ღერძი მიმართულია $\vec{\omega}$ ვექტორის გასწვრივ, ე.ი. $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალის გასწვრივ.

ბრუნვის მყისი ღერძი დროის მიხედვით იცვლის მდებარეობას და აღწერს კონუსურ ზედაპირს, რომლის წვერო მდებარეობს O წერტილში.

მიღებული შედეგი შეიძლება განზოგადდეს იმ შემთხვევაშიც, როცა სხეული ბრუნავს ერთ წერტილზე გადამკვეთი ორზე მეტი ღერძის გარშემო.

14.5. გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლობის უმარტივეს სახემდე დაყვანა

მივედით ყველაზე ზოგად შემთხვევამდე: სხეული ერთდროულად ასრულებს m ოდენობის ბრუნვას $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \cdots, \vec{\omega}_m$ კუთხური სიჩქარეებით და n ოდენობის გადატანით მოძრაობას $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ სიჩქარეებით. უნდა დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება: ***გადატანით და ბრუნვით მოძრაობათა ერთობლიობა დაიყვანება ერთ გადატანით და ერთ ბრუნვით მოძრაობაზე.***

ამ დებულების დამტკიცებამდე განვიხილოთ კერძო შემთხვევა: გვაქვს ერთი გადატანითი და ერთი ბრუნვითი მოძრაობა. დავუშვათ, რომ ფარდობითი მოძრაობა არის ბრუნვა Oz ღერძის გარშემო $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით, ხოლო წარმტანი – გადატანითი მოძრაობა $\vec{v}$ სიჩქარით (ნახ. 14.5). იმის მიხედვით, თუ რისი ტოლია $\vec{v}$ და $\vec{\omega}$ ვექტორებს შორის მოთავსებული α კუთხე, შესაძლებელია შემდეგი სამი შემთხვევა.

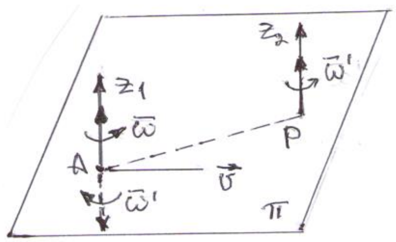
1. გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე ბრუნვის ღერძის მართობია $(\vec{v} \perp \vec{\omega})$**.** ვთქვათ, ბრუნვა ხდება Az_1 ღერძის გარშემო $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით, ხოლო გადატანითი მოძრაობის $\vec{v}$ სიჩქარე მართობია $\vec{\omega}$ ვექტორის (ნახ. 14.6). ცხადია, სხეულის შედგენილი მოძრაობა ბრტყელი მოძრაობაა Az_1 ღერძის მართობი უძრავი π სიბრტყის მიმართ. პოლუსად მივიღოთ A წერტილი, მაშინ გადატანითი მოძრაობა იქნება მოძრაობა $\vec{v}_A = \vec{v}$ სიჩქარით, ხოლო ბრუნვითი მოძრობა – პოლუსზე გამავალი Az_1 ღერძის გარშემო ბრუნვა $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით.

გადატანითი მოძრაობის $\vec{v}$ სიჩქარე შევცვალოთ $(\vec{\omega}', \vec{\omega}'')$ ბრუნთა წყვილით ისე, რომ $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, ხოლო $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$. ამასთან, AP მანძილი განისაზღვრება $v = \omega' \cdot AP$ ტოლობიდან:

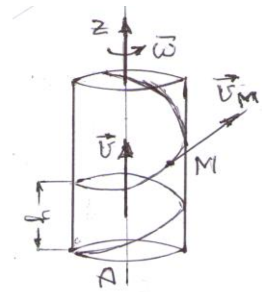
$$AP = v/\omega . \qquad (14.5.1)$$

$\vec{\omega}$ და $\vec{\omega}''$ ვექტორები ერთმანეთს აბათილებენ და გვრჩება მხოლოდ ბრუნვა Pz_2 ღერძის გარშემო $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. ეს შედეგი მიღებული გვაქვს მყარი

სხეულის ბრტყელი მოძრაობის შესწავლისას. ეს არის ის შემთხვევა, როცა პოლუსად ვირჩევთ რა სიჩქარეთა მყის ცენტრს (ჩვენ შემთხვევაში P წერტილს), ვღებულობთ



ნახ. 14.6



ნახ.14.7

მხოლოდ ბრუნვას მის გარშემო. განხილულმა შემთხვევამ ერთხელ კიდევ დაგვარწმუნა იმაში, რომ მოძრაობის ბრუნვითი ნაწილი არ არის დამოკიდებული პოლუსის არჩევაზე (მართლაც, $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$).

2. გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე ბრუნვის ღერძის პარალელურია $(\vec{v} \parallel \vec{\omega})$. სხეულის მოძრაობას, რომელიც შედგება Az ღერძის გარშემო $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით ბრუნვისა და გადატანითი მოძრაობისაგან, რომლის $\vec{v}$ სიჩქარე პარალელურია Az ღერძის, **ხრახნული მოძრაობა** ან **კინემატიკური ხრახნი** ეწოდება. Az ღერძს ვუწოდოთ **ხრახნის ღერძი.** ხრახნი მარჯვენაა, როცა $\vec{v}$ და $\vec{\omega}$ ვექტორები ერთ მხარესაა მიმართული, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მარცხენა.

ერთი სრული ბრუნით სხეულის შემობრუნების შედეგად სხეულის წერტილის გადააადგილებას ცოლინდრის მსახველის გასწვრივ, **ხრახნის ბიჯი** ეწოდება (ნახ. 14.7). როცა $\vec{v}$ და $\vec{\omega}$ ვექტორები მუდმივებია, მაშინ ბიჯიც მუდმივია. აღვნიშნოთ იგი h-ით, სრული ბრუნისთვის საჭირო დრო - T-თი, მაშინ $vT = h$, $\omega T = 2\pi$ =>

$$h = 2\pi v/\omega . \qquad (14.5.2)$$

სხეულის ნებისმიერი წერტილი, რომელიც არ მდებარეობს ხრახნის ღერძზე, მუდმივი ბიჯის შემთხვევაში მოძრაობა წირზე, რომელსაც **ხრახნული წირი** ეწოდება. განვიხილოთ სხეულის რაიმე M წერტილი, რომელიც ხრახნის ღერძიდან დაშორებულია r მანძილით, მაშინ მისი $\vec{v}_M$ სიჩქარე შედგება გადატანითი მოძრაობის $\vec{v}$ სიჩქარისა და ბრუნვითი მოძრაობის ωr სიჩქარისაგან. ამგვარად,

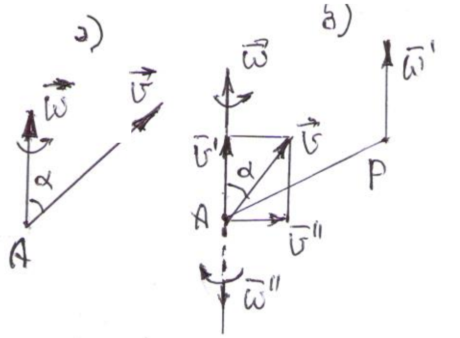
$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2} . \qquad (14.5.3)$$

3. გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე ბრუნვის ღერძთან ადგენს ნებისმიერ კუთხეს. ამ შემთხვევაში სხეულის მიერ შესრულებული რთული მოძრაობა წარმოადგენს თავისუფალი მყარი სხეულის მოძრაობას (იხ. თავი XII).

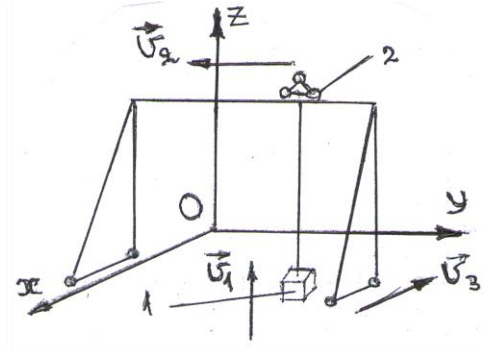
$\vec{v}$ ვექტორი დავშალოთ $\vec{\omega}$ ვექტორის მიმართულების გასწვრივ $\vec{v}'$ და მის მართობულ სიბრტყეში $\vec{v}''$ შემდგენებად (ნახ. 14.8). ადვილად მივიღებთ, რომ $v' = v\cos\alpha$ და $v'' = v\sin\alpha$. $\vec{v}''$ სიჩქარე შევცვალოთ $(\vec{\omega}', \vec{\omega}'')$ ბრუნთა წყვილით ისე, რომ $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$,

ხოლო $\vec{\omega}''=-\vec{\omega}$. $\vec{\omega}$ და $\vec{\omega}''$ ერთმანეთს აბათილებენ. AP მანძილი განისაზღვრება (14.5.1) ფორმულით:

$$AP = v''/\omega = v\sin\alpha/\omega\,. \qquad (14.5.4)$$



ნახ. 14.8



ნახ. 14.9

მივიღეთ: სხეულის მოძრაობა შედგება Oz ღერძის გარშემო $\vec{\omega}'=\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით ბრუნვითი და $\vec{v}'$ სიჩქარით გადატანითი მოძრაობებისაგან. ამგვარად, სხეულში წერტილების სიჩქარეები დროის მოცემულ მომენტში ისეა განაწილებული, თითქოს გვაქვს ხრახნული მოძრაობა Pz ღერძის გარშემო $\vec{\omega}'=\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარითა და

$$v' = v\,cos\alpha \qquad (14.5.5)$$

გადატანითი სიჩქარით.

გარდაქმნების შედეგად A პოლუსიდან გადავედით P პოლუსზე და ერთხელ კიდევ დავრწმუნდით, რომ სხეულის მოძრაობის ზოგად შემთხვევაში კუთხური სიჩქარე არ არის დამოკიდებული პოლუსის არჩევაზე $(\vec{\omega}'=\vec{\omega})$; იცვლება მხოლოდ გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე $(\vec{v}'\neq\vec{v})$.

სხეულის მოძრაობის დროს $\vec{v},\vec{\omega}$ და α, საზოგადოდ, იცვლება. ამიტომ იცვლება Pz ღერძის მდებარეობაც. ამის გამო მას უწოდებენ **მყის ხრახნულ ღერძს.** ამგვარად, თავისუფალი სხეულის მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც უწყვეტად ცვლადი ხრახნული ღერძის გარშემო მყისი ხრახნული მოძრაობების ერთობლიობა.

დავუბრუნდეთ პარაგრაფის დასაწყისში ჩამოყალიბებული დებულების დამტკიცებას. შევცვალოთ გადატანითი მოძრაობები მყისი ბრუნთა წყვილებით, მაშინ გვექნება მხოლოდ ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა. მივიღეთ სრიალა ვექტორთა სისტემა. დავიყვანოთ ეს სისტემა ნებისმიერი A წერტილის მიმართ ერთ $\vec{\omega}$ ვექტორამდე და ერთ $(\vec{\omega}';-\vec{\omega}')$ წყვილვექტორამდე (იხ. სტატიკაში ანალოგიური საკითხი ძალთა სისტემის დაყვანაზე).

$\vec{\omega}$ ვექტორი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2+\cdots+\vec{\omega}_n \qquad (14.5.6)$$

და გამოსახავს ერთ მყის ბრუნს.

$(\vec{\omega}'; -\vec{\omega}')$ წყვილვექტორი გამოსახავს მყის გადატანას და მისი მომენტი ტოლია სისტემის ნაკრები მომენტისა დაყვანის A ცენტის მიმართ. აღვნიშნოთ იგი $\vec{v}_A$-თი, გვექნება:

$$\vec{v}_A = \vec{M}_A(\vec{\omega}_1) + \vec{M}_A(\vec{\omega}_2) + \cdots + \vec{M}_A(\vec{\omega}_m). \tag{14.5.7}$$

ამგვარად, ზოგადი შემთხვევისათვის მივიღეთ: ნებისმიერი ოდენობის ბრუნვითი და გადატანითი მოძრაობების ერთობლიობა ერთი მყისი ბრუნვისა და ერთი მყისი გადატანითი მოძრაობის ტოლფასია.

ამოცანა 14.1. სხეული ერთდროულად მონაწილეობს ორ გადატანით მოძრაობაში. განსაზღვრეთ სხეულის აბსოლუტური სიჩქარის მოდული, თუ შემდგენი მოძრაობების სიჩქარეებია: $\vec{v}_1 = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ და $\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.

ამოხსნა. §14.2-ში დავამტკცეთ, რომ გადატანითი მოძრაობათა შეკრებით მიღებული მოძრაობაც გადატანითია და ჯამური (აბსოლუტური) მოძრაობის სიჩქარე შემდგენი მოძრაობების სიჩქარეთა ჯამის ტოლია. ამგვარად, $\vec{v} = \vec{v}_ა = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. პირობის თანახმად, $\vec{v} = (5-2)\vec{i} + (2+3)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ => $v_x = 3$, $v_y = 5$ => $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$.

პასუხი. 5,83.

ამოცანა 14.2. სხეული ერთდროულად მონაწილეობს სამ გადატანით მოძრაობაში. განსაზღვრეთ სხეულის აბსოლუტური სიჩქარის მოდული, თუ შემდგენი მოძრაობების სიჩქარეებია: $\vec{v}_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}_2 = -6\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ და $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

ამოხსნა. ეს ამოცანა იხსნება წინა ამოცანის მსგავსად. $\vec{v} = \vec{v}_ა = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$. პირობის თანახმად, $\vec{v} = (4-6+2)\vec{i} + (-3+5+2)\vec{j} + (1+3-1)\vec{k} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ => v_x=0, v_y=4, v_z=3 => $|\vec{v}_ა| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$=5.

პასუხი. 5.

ამოცანა 14.3. ავტომობილი მოძრაობს ჰორიზონტალურად v_1=3,6 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო საამწყობო კოშკურა ადის ვერტიკალურად ზევით $v_2 = 0{,}5$ მ/წმ სიჩქარით. განსზღვრეთ აბსოლუტური სიჩქარე მუშისა, რომელიც უძრავად დგას კოშკურაზე.

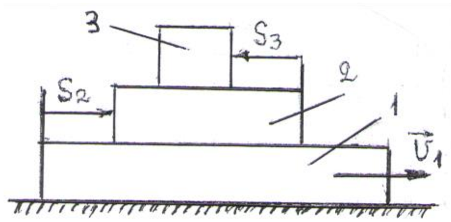
ამოხსნა. ცხადია, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. მაგრამ მუშის გადატანითი მოძრაობები ურთიერთმართობულია, ამიტომ $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, 3,6 კმ/სთ=1 მ/წმ => $v = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}12$ მ/წმ.

პასუხი. 1,12 მ/წმ.

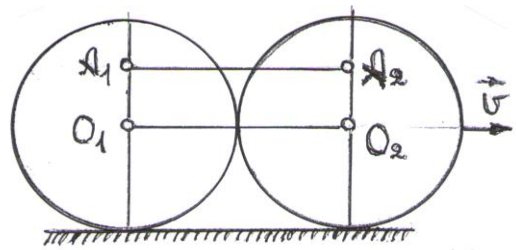
ამოცანა 14.4. 1 ტვირთის აწევა ხდება v_1=0,4 მ/წმ სიჩქარით. ჯოჯგინიანი ამწის 2 ურიკა მოძრაობს v_2=0,3 მ/წმ სიჩქარით, ხოლო თვით ამწე - v_3=0,2 მ/წმ სიჩქარით. განსზღვრეთ 1 ტვირთის აბსოლუტური სიჩქარე (ნახ. 14.9).

ამოხსნა. 1 ტვირთი ერთდროულად მონაწილეობს სამ გადატანით მოძრაობაში, ამიტომ $\vec{v} = \vec{v}_ა = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$. მაგრამ ეს მოძრაობები ურთიერთმართობული მოძრაობებია, რის გამოც $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}3^2 + 0{,}2^2} = \sqrt{0{,}29} \approx 0{,}54$ მ/წმ.

პასუხი. 0,54 მ/წმ.



ნახ. 14.10



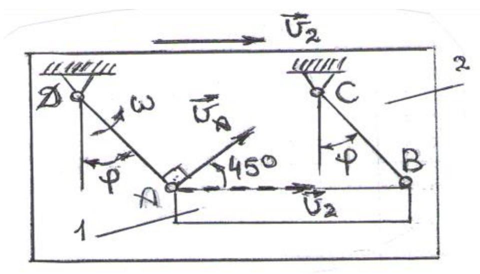
ნახ. 14.11

ამოცანა 14.5. 1, 2, 3 სხეულები ასრულებენ გადატანით მოძრაობებს (ნახ. 14.10). 1 სხეული მოძრაობს v_1=3 მ/წმ სიჩქარით, ხოლო 2 და 3 სხეულები კი - $s_2 = 2t^2$ და $s_3 = 3t^2$ კანონების მიხედვით. განსაზღვრეთ 3 სხეულის აბსოლუტური სიჩქარე დროის t=1 წმ მომენტში.

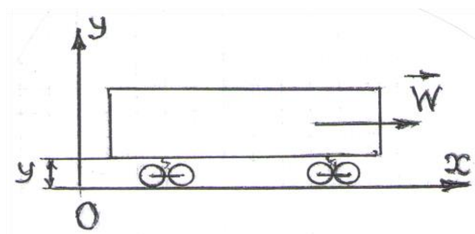
ამოხსნა. ცხადია, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$. მაგრამ სამივე მოძრაობა ურთიერთპარალელურია, ამათგან ორი სხეული მოძრაობს ერთნაირი მიმართულებებით, ამიტომ $v = v_1 + v_2 - v_3$, $v_2 = ds_2/dt = 4t$, $v_3 = ds_3/dt = 6t$ => $v = 3 + 4t - 6t = 3 - 2t$. როცა t=1 წმ, მაშინ v=3-2=1 მ/წმ.

პასუხი. 1 მ/წმ.

ამოცანა 14.6. შეწყვილებული თვლები მოძრაობენ v_0=36 კმ/სთ სიჩქარით. განსაზღვრეთ A_1A_2 მხრეულის აბსოლუტური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა $O_1A_1 = O_2A_2 =$ =0,2 მ სიგრძის მონაკვეთები ვერტიკალურ მდგომარეობაშია (ნახ. 14.11). რადიუსი r =0,25 მ.



ნახ. 14.12



ნახ. 14.13

ამოხსნა. ცხადია, A_1A_2 მხრეულის ყოველ წერტილს აქვს $\vec{v}_0$ სიჩქარე. მათ კიდევ აქვთ ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარეები, რომლებიც, საზოგადოდ, ერთმანეთისგან განსხვავებულებია. მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა $O_1A_1 = O_2A_2$ მონაკვეთები ვერტიკალურ მდგომარეობაშია, მაშინ მხრეულის ყველა წერტილს აქვს ერთნაირი სიჩქარე, ე.ი. ამ მდგომარებაში მისი მოძრაობა მყისი-გადატანითია. გამოვთვალოთ მხრეულის A_1 წერტილის სიჩქარე. ადვილი მისახვედრია, რომ $v_1 = v_{A_1} = \omega \cdot O_1A_1$. გამოვთვალოთ თვალის ω სიჩქარე. P წერტილი თვალის სიჩქარეთა მყისი ცენტრია, ამიტომ $v_0 = \omega r$ => $\omega = v_0/r$, v_0=36 კმ/სთ=10 მ/წმ. მაშინ $v_1 = (v_0/r) \cdot O_1A_1 = (10/0,25) \cdot 0,2 = 8$ მ/წმ. ცხადია,

$\vec{v}_1$ ვექტორი O_1O_2-ის, ანუ $\vec{v}_0$-ის, პარალელურია და ერთნაირი მიმართულებები აქვთ. აქედან $v = v_{აბ} = v_0 + v_1 = 10+8=18$ მ/წმ.

პასუხი. 18 მ/წმ.

ამოცანა 14.7. 1 სხეული $AC = BD = 3$ მ სიგრძის ღეროების საშუალებით მიერთებულია 2 სხეულთან (ნახ. 14.12). განსაზღვრეთ 1 სხეულის აბსოლუტური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა 2 სხეული მოძრაობს $v_1 = 10$ მ/წმ სიჩქარით, კუთხე $\varphi = 45^\circ$ და ღეროების კუთხური სიჩქარე $\omega = 1{,}5$ რად/წმ.

ამოხსნა. ეს ამოცანა იხსნება წინა ამოცანის მსგავსად. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ბრუნვითი სიჩქარის $\vec{v}_A$ ვექტორი AB-სთან, ანუ $\vec{v}_2$ ვექტორთან, ადგენს 45°-იან კუთხეს ($\angle CAB = 135^\circ$, $\vec{v}_A \perp \vec{v}_2$). ცხადია, $v_A = \omega \cdot AC = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ მ/წმ. მაშინ ორი ვექტორის შეკრების პარალელოგრამის წესის თანახმად,

$$v = v_{აბ} = \sqrt{v_2^2 + v_A^2 + 2 \cdot v_2 \cdot v_A \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{10^2 + 4{,}5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{183{,}88} \approx 13{,}6 \text{ მ/წმ}.$$

პასუხი. 13,6 მ/წმ.

ამოცანა 14.8. ვაგონის ძარა ერთდროულად მონაწილეობს ორ გადატანით მოძრაობაში: ერთი გრძივი მოძრაობაა $w = 1$ მ/წმ^2 მუდმივი აჩქარებით, მეორე კი ვერტიკალური რხევაა $y = 1 + 0{,}02\sin 2\pi t$ კანონით (ნახ. 14.13). განსაზღვრეთ ვაგონის მაქსიმალური აბსოლუტური აჩქარების მოდული. [61]

ამოხსნა. ვაგონის აბსოლუტური აჩქარება $\vec{w}_{აბ} = \vec{w} + \vec{w}_y$, სადაც $w_y = d^2y/dt^2 = -0{,}08\pi^2 \sin 2\pi t$. ვინაიდან $\vec{w}$ და $\vec{w}_y$ ურთიერთმართობული ვექტორებია, ამიტომ $|\vec{w}_{აბ}| = \sqrt{w^2 + w_y^2} = \sqrt{1 + \left(-0{,}08^2 \pi^2 \sin 2\pi t\right)^2} = \sqrt{1 + 0{,}0064\pi^4 \sin^2 2\pi t}$. ცხადია, მოდულს ექნება მაქსიმალური მნიშვნელობა, მაშინ, როცა $\sin 2\pi t = 1$. ამგვარად, $|\vec{w}_{აბ}|_{მაქ} \approx \sqrt{1 + 0{,}0064\pi^4} \approx \sqrt{1{,}6222} \approx 1{,}27$ მ/წმ^2.

პასუხი. 1,27 მ/წმ^2.

ამოცანა 14.9. სხეული ერთდროულად მონაწილეობს ორ ბრუნვით მოძრაობაში, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია $\vec{\omega}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ და $\vec{\omega}_2 = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. განსაზღვრეთ სხეულის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის მოდული.

(14.4.4) ფორმულის თანახმად, საძიებელი $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = (2+4)\vec{i} + (5+3)\vec{j} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ => $|\vec{\omega}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ რად/წმ.

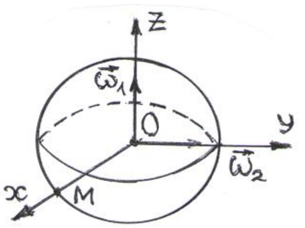
პასუხი. 10.

ამოცანა 14.10. $r = 0{,}5$ მ რადიუსის სფერული გარსი ერთდროულად მონაწილეობს ორ ბრუნვით მოძრაობაში, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია $\omega_1 = 3$ რად/წმ და $\omega_2 = 4$ რად/წმ (ნახ. 14.14). განსაზღვრეთ ნახაზზე გამოსახულ მდებარეობაში გარსის M წერტილის სიჩქარე.

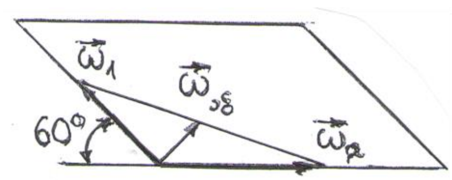
ამოხსნა. ცნობილია, რომ (§14.4) $\vec{v}_M = \vec{v}_{M1} + \vec{v}_{M2} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) + (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}) = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} = (\vec{\omega} \times \vec{r})$. ადვილად გამოვთვლით $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5$ რად/წმ. ნახ. 14.14-დან ჩანს, რომ $\vec{\omega}$

ვექტორი მდებარეობს $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის მართობ სიბრტყეში, ამიტომ $|\vec{v}_M| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin 90^\circ =$ $=5\cdot 0{,}5=2{,}5$ მ/წმ.

პასუხი. 2,5 მ/წმ.



ნახ. 14.14



ნახ. 14.15

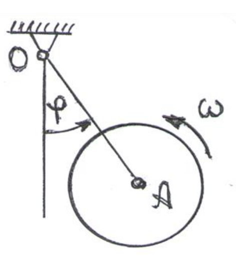
ამოცანა 14.11. ფირფიტა ერთდროულად მონაწილეობს ორ ბრუნვით მოძრაობაში, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია ω_1=2 რად/წმ და ω_2=4 რად/წმ (ნახ. 14.15). განსაზღვრეთ კუთხე გრადუსებში, რომელსაც აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის ვექტორი ადგენს $\vec{\omega}_2$ ვექტორთან. [61]

ამოხსნა. ნახ. 14.15-დან $\omega = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos 120^\circ} = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot 0{,}5} =$ $=2\sqrt{3}$. ვთქვათ, $\angle CAB = \alpha$, მაშინ $\triangle ABC$-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად, $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\cos\alpha$ <=> $4=12+16-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cos\alpha$ => $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$ => $\alpha = 30^\circ$.
პასუხი. 30.

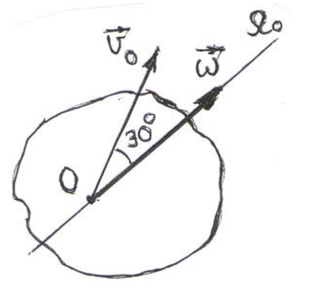
ამოცანა 14.12. სხეული ერთდროულად მონაწილეობს ორი პარალელური ღერძის გარშემო ბრუნვით მოძრაობებში ω_1=2 რად/წმ და ω_2=3 რად/წმ კუთხური სიჩქარეებით, რომელთა ვექტორები ერთ მხარეს არიან მიმართული. განსაზღვრეთ სხეულის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის მოდული.

ამოხსნა. §14.3-ში დავამტკიცეთ, რომ, როცა სხეული ბრუნავს ერთდროულად ორი პარალელური ღერძის გარშემო ისე, რომ კუთხური სიჩქარეების ვექტორები მიმართული არიან ერთ მხარეს, მაშინ აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის მოდული უდრის კუთხურ სიჩქარეთა ალგებრულ ჯამს. ამგვარად, $\omega = \omega_1 + \omega_2$=2+3=5 რად/წმ.

პასუხი. 5 რად/წმ.



ნახ. 14.16



ნახ. 14.17

ამოცანა 14.13. თვალი ერთდროულად მონაწილეობს ორი პარალელური ღერძის გარშემო ბრუნვით მოძრაობებში ω_1=4 რად/წმ და ω_2=3 რად/წმ კუთხური სიჩქარეებით, რომელთა ვექტორები სხვადასხვა მხარეს არიან მიმართული. განსაზღვრეთ თვალის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის მოდული.

ამოხსნა. §14.3-ში დავამტკიცეთ, რომ, როცა სხეული ბრუნავს ერთდროულად ორი პარალელური ღერძის გარშემო ისე, რომ კუთხური სიჩქარეების ვექტორები მიმართული არიან სხვადასხვა მხარეს, მაშინ აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის მოდული უდრის კუთხურ სიჩქარეთა ალგებრულ სხვაობას. ამგვარად, $\omega=\omega_1-\omega_2$=4−3=1 რად/წმ.

პასუხი. 1 რად/წმ.

ამოცანა 14.14. ბრტყელი მექანიზმის *OA* მრუდმხარას ბრუნვა განისაზღვრება $\varphi_1=\cos 2t$ განტოლებით. თვალი მრუდმხარას მიმართ ბრუნავს ω_2=3 რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 14.16). განსაზღვრეთ თვალის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის მოდული დროის t=2 წმ მომენტში.

ამოხსნა. ადვილი შესამჩნევია, რომ გვაქვს პარალელური ღერძების გარშემო ორი ბრუნვა ერთ მხარეს მიმართული კუთხური სიჩქარეებით, ამიტომ $\omega=\omega_1+\omega_2$. $\omega_1=d\varphi_1/dt=-2\sin 2t$ => $\omega=3-2\sin 2t$. როცა t=2 წმ, მაშინ $\omega=3-2\sin 4$. მაგრამ 1 რად $\approx 57^\circ 18'$, ამიტომ $\omega\approx 3-2\sin 229^\circ 12'=3+2\sin 49^\circ 12'\approx 3+2\cdot 0{,}757\approx 4{,}51$ რად/წმ.

პასუხი. 4,51 რად/წმ.

ამოცანა 14.15. სხეულს აქვს გადატანითი მოძრაობის v=7 მ/წმ სიჩქარე და $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე. განსაზღვრეთ კინემატიკური ხრახნის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე, თუ კუთხე $\vec{v}$ და $\vec{\omega}$ ვექტორებს შორის უდრის 70°-ს.

ამოხსნა. §14.5-ში მივიღეთ, რომ, თუ $\vec{v}$ სხეულის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარეა, ხოლო α - კუთხე $\vec{v}$ და $\vec{\omega}$ ვექტორებს შორის, მაშინ კინემატიკური ხრახნის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე $v'=v\cos\alpha$. მოცემული სიდიდეების გათვალისწინება გვაძლევს: $v'=7\cos 70^\circ\approx 7\cdot 0{,}3420\approx 2{,}39$ მ/წმ.

პასუხი. 2,39 მ/წმ.

ამოცანა 14.16. პოლუსის $\vec{v}_0$ სიჩქარისა და სხეულის $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარის ვექტორები ადგენენ 30°-იან კუთხეს (ნახ. 14.17). განსაზღვრეთ Ω_0 ღერძიდან რა მანძილზე იმყოფება კინემატიკური ხრახნის ღერძი, თუ v_0=6 მ/წმ, ω=6 რად/წმ.

ამოხსნა. §14.5-ში მივიღეთ, რომ საძიებელი მანძილი გამოითვლება (იხ. (14.5.4) ტოლობა) $v\sin\alpha/\omega$ ფორმულით. მოცემული სიდიდეების გათვალისწინებით ვღებულობთ: $v\sin\alpha/\omega=$ $6\sin 30^\circ/6=0{,}5$ მ.

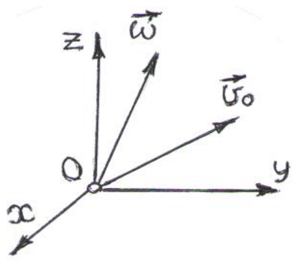
პასუხი. 0.5 მ.

ამოცანა 14.17. სხეული ასრულებს თავისუფალ მოძრაობას: პოლუსის სიჩქარე $\vec{v}_0=5\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}$, ბრუნვითი სიჩქარე $\vec{\omega}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ (ნახ. 14.18). განსაზღვრეთ სხეულის კინემატიკური ხრახნის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარის მოდული.

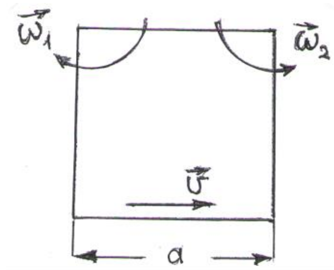
ამოხსნა. §14.5-ში მივიღეთ, რომ კინემატიკური ხრახნის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე $v'=v_0\cos\alpha$, სადაც α კუთხეა $\vec{v}_0$ და $\vec{\omega}$ ვექტორებს შორის. $\cos\alpha$-ს გასაგებად

უნდა ამოვხსნათ მარტივი მათემატიკური ამოცანა: ცნობილია $\vec{v}(5;6;7)$ და $\vec{\omega}(1;-2;3)$ ვექტორები და უნდა გავიგოთ მათ შორის α კუთხე. ამგვარად,

$$v_{0x}\cdot\omega_x+v_{0y}\cdot\omega_y+v_{0z}\cdot\omega_z=|\vec{v}_0||\vec{\omega}|\cos\alpha,\quad |\vec{v}_0|=\sqrt{5^2+6^2+7^2}=\sqrt{110},\quad |\vec{\omega}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=$$
$$=\sqrt{14} \;=>\; 5\cdot1+6\cdot(-2)+7\cdot3=\sqrt{110}\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\alpha \;=>\; \cos\alpha=\sqrt{14}/\sqrt{110}.$$



ნახ. 14.18



ნახ. 14.19

მაშინ $|\vec{v}'|=|\vec{v}_0|\cos\alpha=\sqrt{110}\cdot\left(\sqrt{14}/\sqrt{110}\right)=\sqrt{14}\approx3{,}74.$

პასუხი. 3,74.

ამოცანა 14.18. a=0,5 მ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატული ფირფიტა ერთდროულად მონაწილეობს $v_{გად}$=3 მ/წმ სიჩქარით გადატანით მოძრაობასა და ორ ბრუნვით მოძრაობაში, რომელთა კუთხური სიჩქარეები $\omega_1=\omega_2$=4 რად/წმ (ნახ. 14.19). განსაზღვრეთ ფირფიტის აბსოლუტური გადატანითი სიჩქარის მოდული.

ამოხსნა. $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორები ადგენენ ბრუნთა წყვილს (ურთიერთპარალელურებია, ბრუნვები ხდება სხვადასხვა მიმართულებებით და $\omega_1=\omega_2$). §14.3-ში მივიღეთ, რომ ბრუნთა წყვილი წარმოადგენს მყის-გადატანით მოძრაობას $v_{ბრ}=\omega\cdot a$ სიჩქარით, რომელიც $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობია (ნახ. 14.19). ამგვარად, გვაქვს: ფირფიტის გადატანითი აბსოლუტური სიჩქარე შედგება $\vec{v}_{გად}$ და $\vec{v}_{ბრ}$ ურთიერთმართობი სიჩქარეებისაგან. აქედან $\vec{v}_{აბ}^{(გად)}=\vec{v}_{გად}+\vec{v}_{ბრ}$ => $v_{აბ}^{(გად)}=\sqrt{v_{გად}^2+\omega^2a^2}$ =

$=\sqrt{3^2+4^2\cdot0{,}5^2}=\sqrt{13}\approx3{,}61$ მ/წმ.

პასუხი. 3,61.