

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინგა სტეფნაძე

რთულკონტურიანი ფილების და დამრეცი გარსების  
განგარიშების საკითხი

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად  
სადოქტორო პროგრამა მშენებლობა

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო

თებერვალი, 2016 - წელი

საავტორო უფლება © 2016- წელი, სტეფნაძე ინგა  
თბილისი

2016 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში

სამშენებლო ფაკულტეტი

საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ასოც. პროფესორი რამაზ ჭყოიძე

რეცენზენტები: პროფესორი ტ. კვიციანი

პროფესორი მ. ყალაბეგაშვილი

დაცვა შედგება 2016 წლის 16 თებერვალს 12 საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის

სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე,

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 72 , I სასწავლო კორპუსი

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს

სწავლული მდივანი:

სრული პროფესორი დ. ტაბატაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი  
სამშენებლო ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით სტეფნაძე ინგას მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „**რთულკონტურიანი ფილების და დამრეცი გარსების გაანგარიშების საკითხი**“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ასოც. პროფესორი რამაზ ჭყობიძე

რეცენზენტები:

პროფესორი ტ. კვიციანი

პროფესორი მ. ყალაბეგაშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2016 წელი

ავტორი: სტეფანაძე ინგა

დასახელება: „რთულკონტურიანი ფილების და დამრეცი  
გარსების გაანგარიშების საკითხი“

ფაკულტეტი: სამშენებლო

აკადემიური ხარისხი: დოქტორი

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტის მიერ  
ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის  
შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების  
უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

---

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც  
მთლიანი ნაშრომის და არც ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა  
რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი  
ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო  
უფლებებით დაცულ მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა  
იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ  
მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია  
სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს  
პასუხისმგებლობას.

## რეზიუმე

ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით აგებულია რიტცის გავლენის ფუნქცია მართკუთხა ფირფიტისთვის, სასაზღვრო პირობების სხვადასხვა შემთხვევაში:

- სახსრულად დაყრდნობილია;
- სახსრულად დაყრდნობილია სამ გვერდის კონტურზე და თავისუფალია მეოთხე გვერდი.

განხილულია ოთკუთხა ფირფიტა, როგორც ძირითადი სისტემა და ძალის მეთოდით (მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდით)

გადაწყვეტილია სამკუთხა ფირფიტის განივი ღუნვის ამოცანა.

ამოცანების ამოხსნა (პოტენციური ენერჯის გამოთვლა) განხორციელდა ორ ვარიანტად.

- ამოცანის ამოხსნა გამოსახულებით, რომელიც გამოიყენება კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში,
- ამოცანის ამოხსნა მოდიფიცირებული გამოსახულებით,

ზემოთაღნიშნულის შესაბამისად მართკუთხა სისტემებისათვის აგებულია გავლენის გრინის ფუნქცია, როგორც მიღებულია კლასიკურ მექანიკაში არსებული ხერხით, ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულების გამოყენებით.

დაზუსტებული ფორმულების გამოყენებით შედგენილი კანონიკური განტოლებების ამოხსნის შედეგად გადაწყვეტილია სამკუთხა (რთული მოხაზულობის) ფირფიტის ამოცანა, როგორც არსებული კლასიკური მეთოდებით, ასევე დაზუსტებული მეთოდით.

განხილულია რიცხვითი მაგალითები.

### **Abstract:**

Energy method is used for building Green function for rectangular plate for two cases of contour fixing:

- Hinge supported;
- Three sides - hinge supported and the fourth side free.

Rectangular plate is taken as a basis and the task of lateral bending of triangular plate is solved by using the method of forces (the method of expansion of the given system).

There are two variants of calculation of potential energy given:

- Calculation by formulas adopted in classical theory of elasticity;
- Calculation by modified formulas.

Based on the above mentioned, Green function for main rectangular systems is built using both the method of classical theory of elasticity and the corrected method. Use of corrected formulas for building canonical equations and for solving them enable to solve the problem of triangular plate (complicated contour) bending applying both classical and corrected methods.

Numerical examples are solved.

## შინაარსი

<i>N</i>	<i>დასახელება</i>	<i>გვ.</i>
	<b>შესავალი</b>	
	<b>თავი I. დრეკადობის თეორიის ზოგადი საკითხები</b>	<b>15</b>
1.1	საერთო მოსაზრებები.	15
1.2	ძირითადი განტოლებები.	17
1.3	ამოცანის ამოხსნის ხერხები.	19
1.4	ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობა.	20
1.5	ფირფიტის ღუნვის საკითხები.	21
1.6	ფირფიტის ღუნვის თეორიის ძირითადი განტოლებები გამოსახული ჩაღუნვის საშუალებით.	24
1.7	ამოცანების ვარიაციული ფორმულირება.	31
1.8	რთულკონტურიანი ფირფიტების გაანგარიშება მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდით.	33
1.9	სწორკუთხოვანი ფირფიტა. ნავიეს ამონახსნი.	34
1.10	სწორკუთხოვანი ფირფიტა. ლევის ამონახსნი.	38
1.11	ბუზნოვ-გალიორკინის მეთოდი.	41
1.12	სასრული სხვაობის მეთოდი.	49
1.13	სასრული ელემენტების მეთოდი.	50
1.14	პროგრამული კომპლექსი ЛИРА (ПК ЛИРА).	51
1.15	პროგრამა „Matlab“-ი.	65
	<b>თავი II. კონტურზე სახსრულად დაყრდნობილი მართკუთხა ფირფიტის გაანგარიშება</b>	<b>67</b>
	<b>თავი III. სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი და მეოთხე გვერდზე თავისუფალი მართკუთხა ფირფიტის გაანგარიშება</b>	<b>76</b>
	<b>თავი IV. ორ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი და მესამე გვერდზე ხისტად ჩამაგრებული სამკუთხა ფირფიტის გაანგარიშება</b>	<b>82</b>

## ცხრილების ნუსხა

<i>N</i>	გვ.
1.1	64



## ნახაზების ნუსხა

<i>N</i>	<i>დასახელება</i>	<i>გვ.</i>
1.1		15
1.2		22
1.3		24
1.4		26
1.5		26
1.6		27
1.7		28
1.8		34
1.9		35
1.10		38
1.11		45
1.12		49
1.13		50
1.14	სასრული ელემენტების ვარსკვლავები	58
2.1		67
3.1		76
4.1		82
4.2		83
4.3		83
4.4		90

## სურათების ნუსხა

<i>N</i>	<i>დასახელება</i>	<i>გვ.</i>
1.1	ფილები ავიაციაში	21
1.2	ფოლადის ფილა გემთმშენებლობისათვის	22
4.1	საანგარიშო სივრცითი მოდელი	102
4.2	საანგარიშო სქემა	102
4.3	მლუნავი მომენტები $M_x$ ღერძის მიმართ	103
4.4	მლუნავი მომენტები $M_y$ ღერძის მიმართ	103
4.5	მლუნავი მომენტები $M_{xy}$	104
4.6	განივი ძალა $Q_x$	104
4.7	განივი ძალა $Q_y$	105
4.8	გადაადგილება $Z$ ღერძის მიმართულებით	105

## შესავალი

### ნაშრომის საერთო დახასიათება

#### თემის აქტუალობა:

ფირფიტები დღევანდელ დღეს ფართოდ გამოიყენება ტექნიკის სხვადასხვა სფეროში - მშენებლობაში, ავიაციაში, გემთმშენებლობაში, მანქანათმშენებლობაში, და ა.შ. ეს აიხსნება თხელკედლიანი კონსტრუქციების სიმსუბუქით და რაციონალურ ფორმებთან ერთად ეკონომიურობით და კარგი ტექნოლოგიურობით. ფირფიტების ყველაზე გავრცელებული სახეა ეგრეთწოდებული თხელი ფირფიტები  $8 \div 10 \leq a/\delta \leq 80 \div 100$ , სადაც  $a$  გეგმაში უმცირესი გვერდია;  $\delta$  სისქე.

როგორც ცნობილია გეგმაში რთული მოხაზულობის ფირფიტების გაანგარიშება ნებისმიერი დატვირთვის და სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით წარმოადგენს საკმაოდ რთულ ამოცანას და ხშირად მისი ამოხსნა შეუძლებელია.

#### დისერტაციის მიზანი:

წარმოდგენილი ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს ღუნვაზე მომუშავე ფირფიტების ახალი საანგარიშო სქემების შექმნა, გაანგარიშებების სრულყოფა და უფრო ზუსტი შედეგების მიღება სხვა სამეცნიერო შრომებზე დაყრდნობით. მართკუთხა ფირფიტებისთვის ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით აიგოს გრინის გავლენის ფუნქცია სხვადასხვა სასაზღვრო პირობებში (ოთხივე გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი, სამი გვერდით სახსრულად დაყრდნობილი და მეოთხე გვერდზე თავისუფალი).

ოთხკუთხა ფირფიტის ძირითად სისტემად არჩევის გზით და ძალთა მეთოდის (მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდის) გამოყენებით ჩატარდეს სამკუთხა ფირფიტის გაანგარიშება.

განხილული იქნას პოტენციური ენერჯის გამოთვლის ორი ვარიანტი: პირველი, როგორც ეს მიღებულია კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში და მეორე

მოდულიზირებული მეთოდით, რომელიც უფრო რეალურად ასახავს დაძაბულ მდგომარეობას და არსებულთან შედარებით იძლევა ფირფიტების ღუნვის ამოცანების დაზუსტებულ ამონახსნებს. ძირითადი მიზანია განვსაზღვროთ იმ ცვლილებების პრაქტიკული ღირებულება, რასაც გამოიწვევს ამოცანების ჩვენს მიერ შემოთავაზებული გადაწყვეტა არსებულთან შედარებით.

### **მეცნიერული სიახლე:**

2007 წელს შედგენილი პოტენციური ენერჯის გამოსათვლელი მოდულიზირებული გამოსახულება წარმოადგენს ფუნდამენტალურ სამეცნიერო ნაშრომს. ჩვენს მიერ პირველად ხდება აღნიშნული გამოსახულების გამოყენება:

- მართკუთხა ფირფიტებისათვის გრინის ფუნქციის შესადგენად;
- რთულკონტურიანი ფირფიტის გაანგარიშებისას ძალთა მეთოდის კანონიკური განტოლებების შესადგენად;
- აღნიშნულის შედეგად ვღებულობთ დაზუსტებულ გრინის ფუნქციებს და დაზუსტებულ ძალთა მეთოდს.

### **შედეგების პრაქტიკული ღირებულება:**

მართკუთხა იზოტროპული მთელ კონტურზე სახსრულად დაყრდნობილი ან სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი და მეოთხე გვერდზე თავისუფალი ფირფიტებისათვის შედგენილი დაზუსტებული გრინის ფუნქციების მეშვეობით აღნიშნული სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში შეიძლება დაზუსტებულად გაანგარიშებული იქნას მართკუთხა ფირფიტები ნებისმიერ დატვირთვაზე. ზემოთ აღნიშნული ფირფიტები შეიძლება განხილული იქნას, როგორც ძირითადი სისტემები და ძალთა მეთოდის გამოყენებით შესაბამისი დაზუსტებული გრინის ფუნქციების გათვალისწინებით ამოიხსნას რთულკონტურიანი ფირფიტების განივი ღუნვის ამოცანები ნებისმიერი დატვირთვისას.

## ნაშრომის შინაარსი

**შესავალში** წარმოდგენილია თემის აქტუალობა, დისერტაციის მიზანი, მეცნიერული სიახლე და მიღებული შედეგების პრაქტიკული ღირებულება.

**პირველი თავში** მოყვანილია მასალა თემის აქტუალობის შესახებ და განხილულია ფირფიტების ღუნვის ის ზოგადი საკითხები, რომლებზეც დაყრდნობით მიღებული იქნა დისერტაციის შედეგები.

**მეორე თავში** განხილულია იზოტროპიული გეგმაში მართკუთხა ფორმის ფირფიტა, როგორც ძირითადი სისტემა რთული ფორმის ფირფიტების გაანგარიშებისთვის მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდის გამოყენებით.

სისტემისთვის აგებულია გავლენის გრინის ფუნქცია რიტცის ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით. სრული ენერგიის გამოსახულების შედგენისას, დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი) გაანგარიშებული იქნა როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში არსებული გამოსახულებით, ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებით.

ამოცანების ამოხსნა ზემოთმოყვანილი პირობების დაცვით განხორციელდა ორ ვარიანტად.

**მასამე თავში** განხილულია ოთკუთხა ფირფიტა, როგორც ძირითადი სისტემა გაგმაში რთული მოხაზულობის ფირფიტების გაასანგარიშებლად მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდის გამოყენებით. ძირითადი სისტემისთვის გამოითვლება გრინის გავლენის ფუნქცია, ენერგეტიკული რიტცის მეთოდის გამოყენებით. სრული ენერგიის გამოსახულების შედგენისას, დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შინაგანი ძალების პოტენციალი) გამოთვლილია როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში არსებული გამოსახულებებით, ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებებით.

ზემოთმოყვანილი პირობების დაცვით ამოცანის ამოხსნა მოხდა ორ ვარიანტად.

მეოთხე თავში განხილულია სამკუთხა ფირფიტა AOB (როგორც ფირფიტა გეგმაში რთული მოხაზულობის), გვერდები AO, BO სახსრულად დაყრდნობილია, ხოლო გვერდი AB ხისტად ჩამაგრებული.

ფირფიტაზე მოქმედებს შეყურსული ძალა მოდებული ფირფიტის შუაში. ვსარგებლობთ მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდით (ძალთა მეთოდი).

ძირითად სისტემად ვღებულობთ გეგმაში ოთხკუთხა ფირფიტას სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილს, ხოლო მეოთხე გვერდით თავისუფალს. მოცემულ ფირფიტას ვდებთ ძირითადი სისტემის კონტურის შიგნით. ძირითადი სისტემა დატვირთულია იგივე დატვირთვით, რაც მოცემული სისტემა.

გვერდები მოცემული სისტემის AO, BO ემთხვევა მოცემული სისტემისას.

დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი) გაანგარიშებული იქნა როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში მიღებული გამოსახულებით, ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებით.

ამოცანების ამოხსნა ზემოთმოყვანილი პირობების დაცვით განხორციელდა ორ ვარიანტად. სისტემა ამოხსნილია შებრუნებული მატრიცის ხერხით და გამოყენებული პროგრამა MATLAB-ი.

შედეგების მიზნით იგივე ამოცანა გადაწყვეტილია სასრული ელემენტების მეთოდითაც. გამოყენებულია პროგრამული კომპლექსი ЛИРА (ПК ЛИРА).

## თავი I. დრეკადობის თეორიის ზოგადი საკითხები.

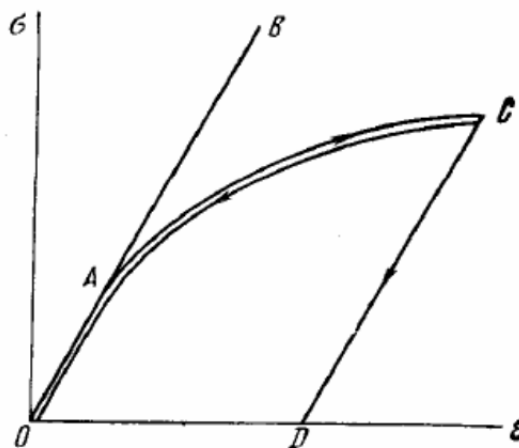
### 1.1. საერთო მოსაზრებები.

ზოგადი ამონახსნები დრეკადობის თეორიის განტოლებების, რომელშიც შედიან ნებისმიერი ჰარმონიული, ბიჰარმონიული და სამჰარმონიული ფუნქციები, ძნელი გამოსაყენებელია კონკრეტული ამოცანების ამოხსნათვის, რადგან ჯერჯერობით არ არსებობს სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ამ ფუნქციების განსაზღვრის მეთოდი.

ამოტომ გამოყენებითი (ტექნიკური) დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნაში ფართო გამოყენება ჰპოვეს სხვადასხვა მიახლოებითა მეთოდებმა.

საერთოდ ანსხვავებენ მათემატიკურ და გამოყენებით დრეკადობის და პლასტიკურობის თეორიებს. უკანასკნელში შეაქვთ შესაბამისი დაშვებები და ამოცანების ამოხსნა ხდება მიახლოებით.

განხილული დრეკადობის თეორიას ჰქვია კლასიკური ანუ წრფივი. მას საფუძვლად უდევს წარმოდგენა იდეალურ დრეკად სხეულზე. ასეთ სხეულში დამოკიდებულებები ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის არის წრფივი. გაჭიმვა-კუმშვის დიაგრამა ასეთი მასალებისთვის წარმოადგენს OAB წრფეს გამავალს საკოორდინატო სისტემის 0 წერტილზე (ნახ. 1.1).



ნახ. 1.1

თუ მასალა მცირე ძაბვების დროსაც არ ემორჩილება წრფივ დეფორმაციის კანონს ან დეფორმაციის პროცესი გადადის პროპორციულობის ზღვარს, მაშინ დეფორმირების დიაგრამა გამოისახება მრუდით OAC. ფიზიკური კანონი ძაბვების გამოისახება ფორმულით  $\sigma = f(\varepsilon)$ . ნელი განტვირთვის შემთხვევაში პროცესი თუ წავიდა CAO მრუდის გასწვრივ, იგივე მიმართულებით რაც დატვირთვის შემთხვევაში და უბრუნდება O წერტილს, ასეთ მასალას ეწოდება დრეკად-არაწრფივი. დრეკად-არაწრფივი სხეულების დეფორმაციის კანონები შეისწავლება არაწრფივ დრეკადობის თეორიაში.

მიახლოებითი გამოთვლის მეთოდები შეიძლება დაიყოს შედეგ ჯგუფებად:

პირველი ჯგუფი ხასიათდება იმით, რომ განხილურ ამოცანების დიფერენციალურ განტოლებებში იყენებენ ფიზიკურ მოსაზრებებზე და ექსპერიმენტების შედეგებზე დაფუძნებული სამუშაო ჰიპოთეზებს. ერთდროულად ამარტივებენ სასაზღვრო პირობებს, რომლებსაც იძლევიან ინტეგრალური ფორმით კონტურის გარკვეულ მონაკვეთებისთვის (მაგალითად, ძაბვების ნაცვლად იღებენ ძაღვებს) ან ლოკალური ფორმით გარკვეული კონტურის კვეთისთვის. ასეთი სახით ამოცანის დასმის დროს, როგორც წესი არ კმაყოფილდება დეფორმაციების უწყვეტობის განტოლებები.

მეორე ჯგუფის მიახლოებით მეთოდებს მიეკუთვნებიან მეთოდები რომლებიც იყენებენ ვარიაციულ პრინციპებს და მათ ეწოდებათ ვარიაციული მეთოდები.

მესამე ჯგუფს მიეკუთვნება პირდაპირი მეთოდები, რომლებსაც დაყავთ დრეკადობის თეორიის ძირითადი დიფერენციალური განტოლებები სასაზღვრო პირობებთან ერთად ჩვეულებრივ დიფერენციალურ ან ალგებრულ განტოლებამდე.

ამოხსნების ბოლო ჯგუფების მეთოდები არის მიახლოებითი პირობითად, რათა მათი დახმარებით შეიძლება მივაღწიოთ შედეგს ნებისმიერი სიზუსტით, თუ ეს შესაძლებელია გაშლილ მწკრივში მეტი წევრების შენარჩუნებით ან საკვლევი ფუნქციის ინტერვალის შემცირებით. ვარიაციული მეთოდები შეიძლება



აღმოჩნდეს ზუსტი, თუ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება ფუნქციონალის ექსტრემუმის კვლევის დროს (მაგალითად,  $\Xi$ ) უშვებს ზუსტ ამოხსნას ან ამოცანას აქვს თავისუფლების ხარისხის სასრული რიცხვი.

გამოყენებითი დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნისას უფრო მოსახერხებელია მიახლოებითი მეთოდების სამივე ჯგუფის ერთობრივი გამოყენება, რასაც მივყევართ ტექნიკური ამოცანების ამოხსნის დიდ მრავალფეროვნებასთან.

ზემოთ მოყვანილი კლასიფიკაცია არ არის ერთობლივი. ავტორების ერთი ჯგუფი პირდაპირ მეთოდებად მიიჩნევს ისეთ მეთოდებს, რომლებსაც დაყავთ დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები ალგებრულ განტოლებამდე, ამ მეთოდებს აკუთვნებენ აგრეთვე ვარიაციულ მეთოდებს (რიტცის-ტიმოშენკოს, ბუზნოვ-გალერკინის); სხვებს მიაჩნიათ პირდაპირ მეთოდებად ყველა მიახლოებითი მეთოდები და ა.შ.

## 1.2. ძირითადი განტოლებები.

1. სტატიკური განტოლებები. ამ ჯგუფში შედიან წონასწორობის დიფერენციალური განტოლებები:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

და პირობები ზედაპირზე:

$$\begin{cases} X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (1.2)$$

2. გეომეტრიული განტოლებები. ამ ჯგუფში შედიან კოშის გეომეტრიული დამოკიდებულებები:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.3)$$

და დეფორმაციათა უწყვეტობის განტოლებები:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (1.4)$$

3. ფიზიკური განტოლებები. ამ ჯგუფში შედის ჰუკის ფორმულები ან პირდაპირი ფორმით:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E, & \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \\ \varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E, & \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \\ \varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E, & \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \end{cases} \quad (1.5)$$

ან შებრუნებული ფორმით:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (1.6)$$

### 1.3. ამოცანის ამოხსნის ხერხები.

გვაქვს რა ზემოთმოყვანილი დამოკიდებულებები, შეგვიძლია დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნა, ანუ გარე ძალების მოქმედების შედეგად სხეულში წარმოქმნილი ძაბვების და დეფორმაციების განსაზღვრა.

ჩამოთვლილი ძირითადი განტოლებები შეიცავს 15 უცნობ ფუნქციას:

ექვს ძაბვის კომპონენტს:

$$\begin{aligned} &\sigma_x(x, y, z), \quad \sigma_y(x, y, z), \quad \sigma_z(x, y, z), \\ &\tau_{xy}(x, y, z), \quad \tau_{yz}(x, y, z), \quad \tau_{zx}(x, y, z); \end{aligned}$$

ექვს დეფორმაციის კომპონენტს:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x(x, y, z), \quad \varepsilon_y(x, y, z), \quad \varepsilon_z(x, y, z), \\ &\gamma_{xy}(x, y, z), \quad \gamma_{yz}(x, y, z), \quad \gamma_{zx}(x, y, z); \end{aligned}$$

და სამ გადაადგილების კომპონენტს:

$$u(x, y, z) \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z).$$

უცნობი ფუნქციების მოსაძიებლად ჩვენ გვაქვს 15-ი განტოლება: სამი წონასწორობის დიფერენციალური განტოლება, ექვსი კომის ფორმულა და ექვსი ფორმულა ჰუკის კანონის. ამრიგად მათემატიკური თვალსაზრისით ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას მოყვანილი თხუთმეტი განტოლების ინტეგრირებით და ზედაპირზე სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებით.

აღნიშნული განტოლებების ამოხსნა შესაძლებელია სხვადასხვა მეთოდებით დამოკიდებული იმაზე თუ რომელ სიდიდეებს მივიჩნევთ ძირითად უცნობებად:

1. ამონახსნი გადაადგილებებში, როცა ძირითად უცნობებად მიღებულია გადაადგილებების კომპონენტები:

$$u(x, y, z) \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z).$$

2. ამონახსნი ძაბვებში, როდესაც ძირითად უცნობებად მიღებულია ძაბვების კომპონენტები:

$$\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z).$$

3. ამონახსნი შერეული ფორმით, როდესაც უცნობებად მიღებულია ნაწილი გადაადგილებებიდან და ნაწილი ძაბვებიდან.

#### 1.4. ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობა.

*სხელი, რომელიც იმყოფება ბუნებრივ პირობებში, დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამონახსნი არის ერთადერთი, თუ სამართლიანია ძალთა ქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპი.*

თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ რადგან დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამონახსნი არის ერთადერთი, მნიშვნელობა არ აქვს თუ რა მათემატიკური მეთოდით იქნება ამოხსნილი ამოცანა.

შეგვიძლია ვუჩვენოთ სამი ძირითადი მეთოდი დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის:

1. პირდაპირი მეთოდი. ეს მეთოდი დამყარებულია დრეკადობის თეორიის გატოლებების უშუალო ინტეგრირებაზე ერთობლივად ზედაპირზე მოცემული პირობების გათვალისწინებით.

2. შებრუნებული მეთოდი. ამ შემთხვევაში ირჩევენ გადაადგილებების ან ძაბვების ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებებს და საზღვრავენ, რომელ გარეშე დატვირთვას შეესაბამებიან განხილული გადაადგილებები და ძაბვები.

3. ნახევრადშებრუნებული სენ-ვენის მეთოდი. ამ მეთოდით ამოცანების ამოხსნისას აკეთებენ ზოგიერთ დაშვებას ძაბვების ან გადაადგილებების ფუნქციების მიმართ. ამით დიფერენციალური განტოლებები იმდენად მარტივდებიან, რომ მათი ამოხსნა არავითარ სირთულეს აღარ წარმოადგენს.

მიღებული მეთოდი წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის ერთერთ ეფექტურ მეთოდს.

### 1.5. ფირფიტის ღუნვის საკითხები.

რადგან მოცემული შრომა ეხება ფირფიტის ღუნვის საკითხებს, მოკლედ შევხებით ამ საკითხთან დაკავშირებულ ინფორმაციას. პრიზმული ან ცილინდრული სხეული, რომლის სიმაღლე არის შედარებით პატარა მის გეგმის ზომებთან შედარებით ეწოდება ფირფიტა.

სიბრტყეს, რომელიც ყოფს ფირფიტის სიმაღლეს შუაზე შუასიბრტყე ეწოდება. ფირფიტის გვერდითი სიბრტყეების გადაკვეთა შუაზედაპირთან გვამღევს ფირფიტის კონტურს (სურ. 1.1; სურ. 1.2).

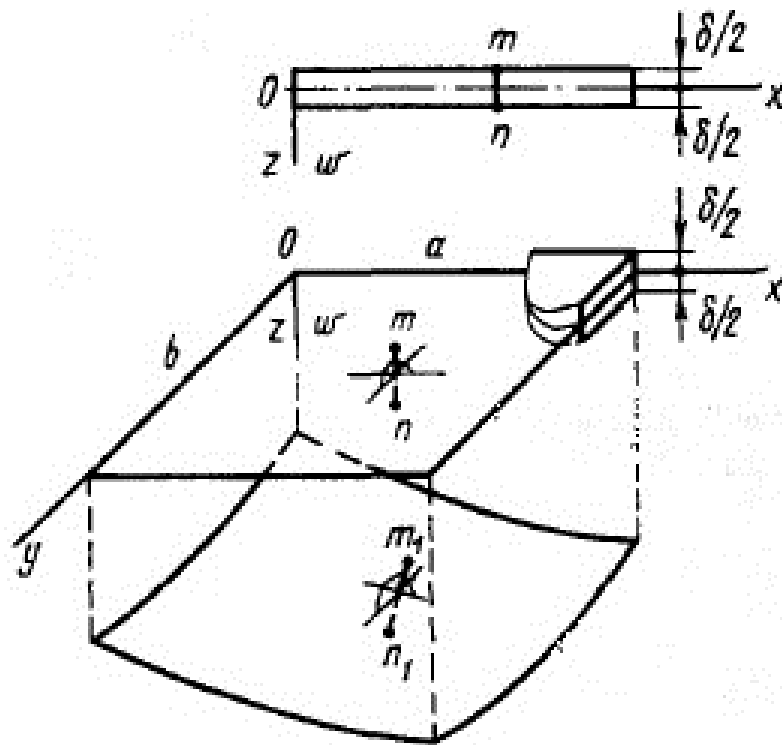
ფირფიტები დღევანდელ დღეს ფართოდ გამოიყენება ტექნიკის სხვადასხვა სფეროში - მშენებლობაში, ავიაციაში, გემთმშენებლობაში, მანქანათმშენებლობაში, და ა.შ. ეს აიხსნება თხელკედლიანი კონსტრუქციების სიმსუბუქით და რაციონალურ ფორმებთან ერთად ეკონომიურობით და კარგი ტექნოლოგიურობით. ფირფიტების ყველაზე გავრცელებული შუალედია ეგრედწოდებული თხელი ფირფიტები  $8 \div 10 \leq a / \delta \leq 80 \div 100$ , სადაც  $a$  გეგმაში უმცირესი გვერდია,  $\delta$  სისქე.



სურ.1.1 ფილები ავიაციაში



სურ.1.2 ფოლადის ფილა გემთმშებლობისათვის



ნახ. 1.2

შევთანხმდეთ  $x$  და  $y$  ღერძები მოვათავსოთ ფირფიტის შუაზედაპირზე, ხოლო  $z$  ღერძი მივმართოდ ქვემოთ. შესაბამისად შუაზედაპირის წერტილის გადაადგილების ძირითადი კომპონენტი - ვერტიკალური ჩალუნვა ავლნიშნოთ

$\omega$ -თი. ღუნვის შედეგად შუაზედაპირი გადადის გაღუნულ ზედაპირში  $\omega = \omega(x, y)$ , მას ეწოდებენ ფირფიტის გაღუნულ შუაზედაპირს (ნახ. 1.2).

თხელი ფირფიტები შეიძლება გავიანგარიშოთ მიახლოებითი თეორიით-ფირფიტების ღუნვის ტექნიკური თეორიით, რომელიც დაფუძნებულია კირჰოფის ჰიპოთეზაზე:

1. წრფივი ნორმალის ჰიპოთეზა: ნებისმიერი წრფივი ელემენტი, ნორმალური ფირფიტის შუაზედაპირის მიმართ, ფირფიტის დეფორმირების შემდეგ რჩება წრფივი და პერპენდიკულარული შუაზედაპირის მიმართ და მისი სიგრძე არ იცვლება.

ნებისმიერი წრფივი ელემენტი, ნორმალური შუაზედაპირის მიმართ ჰიპოთეზის პირველი ნაწილის თანახმად რჩება მართი, ე.ი. ძვრას აღნიშნულ სიბრტყეებში ადგილი არ აქვს:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

წრფივი ელემენტის სიგრძის შენარჩუნების ჰიპოთეზა ვარაუდობს, რომ წრფივი დეფორმაცია  $z$  ღერძის მიმართულებით ტოლია ნულის:

$$\varepsilon_z = 0 \quad (1.8)$$

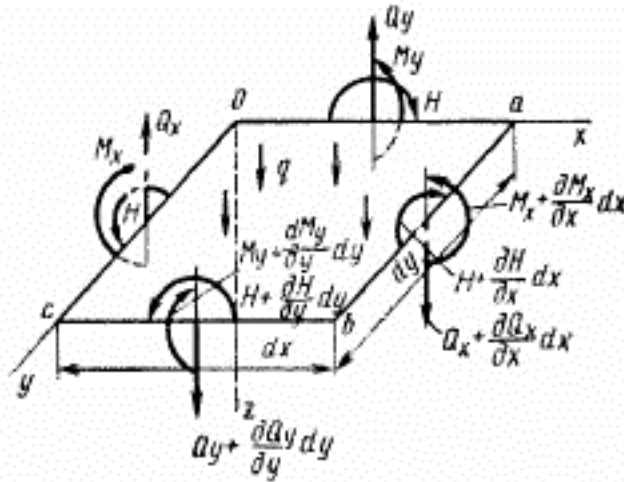
2. შუაზედაპირის დაუძაბვადობის ჰიპოთეზა: შუაზედაპირზე არ წარმოიშობა გაჭიმვის, კუმშვის და ძვრის დეფორმაციები, ე.ი. შუაზედაპირი არის ნეიტრალური (დაუძაბავი). შესაბამისად შუაზედაპირზე გადაადგილებები:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0. \quad (1.9)$$

3. ფირფიტის ფენებს შორის ზეწოლის ძაბვების არ არსებობის ჰიპოთეზა. იმის გამო, რომ ფირფიტის შუაზედაპირის პარალელურ შრეებს შორის ზეწოლის ძაბვები მცირეა, ძაბვები  $\sigma_z$  შეიძლება უგულებელვყოთ  $\sigma_x$  და  $\sigma_y$  ძაბვებთან შედარებით.

1.6. ფირფიტის ლუნვის თეორიის ძირითადი განტოლებები  
გამოსახული ჩალუნვის საშუალებით.

ფირფიტის გალუნული შუაზედაპირის დიფერენციალური განტოლებები.



ნახ. 1.3

$$D \left( \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.10)$$

ან

$$\nabla^4 \omega - q = 0 \quad (1.11)$$

მას უწოდებენ სოფი ჟერმენის განტოლებას.

სოფი ჟერმენის განტოლებების ინტეგრირებისას ჩნდება უცნობი მუდმივები, რომლებიც უნდა განისაზღვროს ფირფიტის კონტურის დაყრდნობის პირობებიდან.

*ფირფიტის წერტილების გადაადგილებები.*

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.12)$$



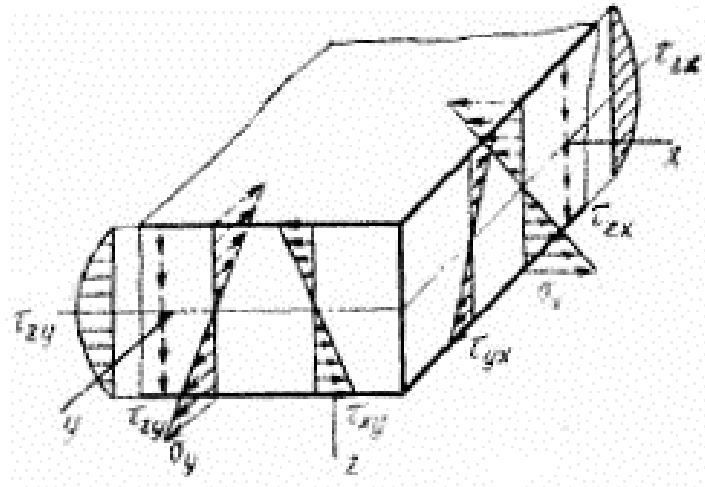
*ფირფიტის დეფორმაციები.*

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{1.13}$$

*ძაბვები ფირფიტაში.*

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega, \\ \tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega.\end{aligned}\tag{1.14}$$

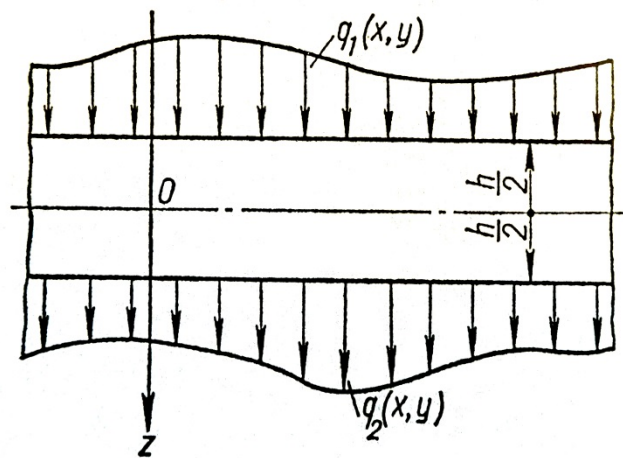
ნახ. 1.4 - ზე ნაჩვენებია ამ ძაბვების გავრცელების კანონი ფირფიტის სისქის მიხედვით. ძაბვები  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  და  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ვრცელდებიან წრფივი კანონით და შუაზედაპირზე ტოლია ნულის, ხოლო ძაბვები  $\tau_{zy}$  და  $\tau_{zx}$  ვრცელდებიან პარაბოლიის კანონით და მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევენ შუაზედაპირზე. ანალოგიურად ვრცელდებიან მხები ძაბვები მართკუთხა ფორმის კოჭის ღუნვისას.



ნახ. 1.4

ძაბვებს  $\sigma_z$  აქვთ იგივე რიგის სიდიდე, რაც  $q$  განივი დატვირთვის ინტენსივობას და შეადგენენ  $\sigma_x$  და  $\sigma_y$  ძაბვების უმნიშვნელო ნაწილს.

$$\sigma_z = \frac{q_2 - q_1}{2} + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 \omega. \quad (1.15)$$



ნახ. 1.5

*ძალეები ფირფიტაში.*

მღუნავი მომენტები:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \quad (1.16)$$

სადაც

$$D = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

- ფირფიტის ცილინდრული სიხისტეა.

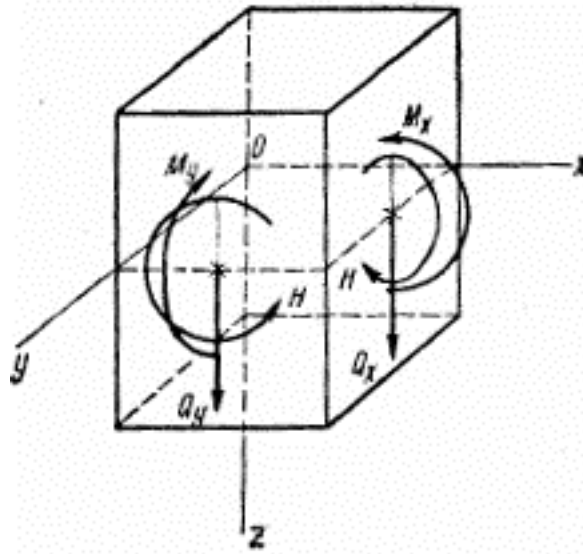
განივი ძალები:

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega, \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega, \end{aligned} \quad (1.17)$$

მგრეხავი მომენტი:

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \quad (1.18)$$

ნახ. 1.6 -ზე ნაჩვენებია ძალების დადებითი მიმართულებები.

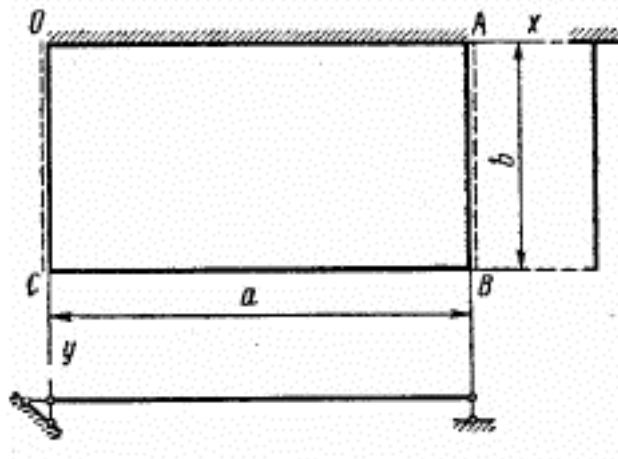


ნახ. 1.6

### **ფირფიტის კონტურის პირობები.**

ფირფიტის კონტურზე შეიძლება მოცემულ იყოს შუაზედაპირის ჩალუნვები და მობრუნების კუთხეები, მღუნავი და მგრეხავი მომენტები, განივი ძალები. ეს ყველაფერი დამოკიდებულია კონტურის ჩამაგრებაზე. პირობებს რომლებიც იძლევიან კონტურის შუაზედაპირის გადაადგილებებს და მობრუნების კუთხეებს

ეწოდებათ გეომეტრიული პირობები. სტატიკური პირობებია, როდესაც კონტურზე მოცემულია ძალები: მღუნავი და მგრეხავი მომენტები და განივი ძალები. თუ კონტურზე ერთდროულად მოცემულია გადაადგილებები და ძალები ასეთ პირობებს შერეული პირობები ეწოდება. ყოველ კიდეზე მოცემული უნდა იყოს ორი სასაზღვრო პირობა. განვიხილოთ ოთკუთხა პირფიტა (ნახ. 1.7).



ნახ. 1.7

ხისტად ჩამაგრებული OA კიდეით. ხისტ ჩამაგრებაში ჩაღუნვები და მობრუნების კუთხე  $x$  ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. ამრიგად გვაქვს შემდეგი პირობები:

$$\text{როცა } y=0 \text{ საჭიროა } \omega = 0, \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (1.19)$$

სახსროვნად დაყრდნობილი კიდეები OC და AB. სახსროვნად დაყრდნობისას კიდეებზე ჩაღუნვები და მომენტები ნულის ტოლია. ამიტომ სასაზღვრო პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\text{როცა } x=0 \text{ და } x=a \text{ საჭიროა } \omega = 0, \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.20)$$

თავისუფალი კიდე CB. თავისუფალ კიდეზე მღუნავი მომენტი  $M_y$ , განივი ძალა  $Q_y$  და მგრეხავი მომენტი  $H$  ტოლი უნდა იყოს ნულის. აქ ორი პირობის ნაცვლად გვაქვს სამი სასაზღვრო პირობა. ეს წინააღმდეგობა დაიძლევა ორი უკანასკნელი სასაზღვრო პირობის ერთით შეცვლით:

$$\begin{cases} M_y = 0 \\ Q_y = 0 \\ H = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_y = 0 \\ Q_y^{\text{прив.}} = -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial^2 x \partial y} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \\ D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial^2 x \partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

### ფირფიტის დეფორმაციის ენერგია.

ფირფიტის ყოველ ჰორიზონტალურ ფენაში აღიძვრება დრეკადი დეფორმაციები  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  (1.13) და მათი შესაბამისი ძაბვები  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  (1.14). დეფორმაციის ენერგიის სიმკრივე მოსული ფირფიტის მასალის მოცულობის ერთეულზე ტოლი იქნება:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}), \quad (1.22)$$

(1.13) და (1.14)-ს გათვალისწინებით:

$$U = \int_0^b \int_0^a D \left\{ (\nabla^2 \omega)^2 - 2(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (1.23)$$

თუ ფირფიტის სიხისტე მუდმივია,  $D$  -ს გატანა ინტეგრალის ნიშნის გარეთ შესაძლებელია. ფირფიტისთვის რომელსაც კონტურზე ხისტი ჩამაგრება აქვს (ნორმალის მობრუნების კუთხე შუაზედაპირის მიმართ  $\theta_n = 0$ ) ან სახსროვანი დაყრდნობის შემთხვევაში (მღუნავი მომენტი  $M_n = 0$ ), ინტეგრალის აღება სიბრტყეზე მარტივდება, რადგან (1.23)-ში კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული წევრი ტოლია ნულის. მაშინ გამოსახულება  $U$  დებულობს შემდეგ სახეს:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a (\nabla^2 \omega)^2 dx dy, \quad (1.24)$$

სადაც

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

ფირფიტის ცილინდრული სიხისტეა;

$$\nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

- ლაპლასის ოპერატორი.

ფირფიტის სრული ენერგია ტოლია ჯამის  $U$ - დეფორმაციის ენერგიის და  $\Pi$ -გარე ძალების პოტენციალის:

$$\mathfrak{E} = U + \Pi \quad (1.25)$$

#### ფირფიტის დრეკადი პოტენციალის დაზუსტებული გამოსახულება.

შრომებში [4], [5] განხილულია ჰუკის განზოგადებული კანონი და მის საფუძველზე მიღებული დრეკადი პოტენციალი. ნაჩვენებია, რომ ჰუკის განზოგადებულ კანონში დეფორმაციისა და ძაბვის ტენზორების მთავარი დიაგონალის მიმართ სიმეტრიული კოეფიციენტების ტოლობა მიღწეულია ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის შეუსაბამობის წინასწარი დაშვებით, რის შედეგადაც არაკორექტული გამოდის დეფორმაციის ხვედრითი პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებაც. ანიზოტროპიის ზოგადი შემთხვევისათვის ნაშრომში გარკვეულია ჰუკის განზოგადებულ კანონში და დრეკად პოტენციალში შემავალი წევრების რეალური ფიზიკური აზრი და მიღებულია შესაბამისად მათი კორექტული გამოსახულებები. დრეკადი პოტენციალი ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$U = \frac{D^*}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy; \quad (1.26)$$

სადაც

$$D^* = \frac{Eh^3}{12}$$

- ფირფიტის ცილინდრული სიხისტეა,

$G$  – ძვრის მოდულია,

- E - დრეკადობის მოდული,
- h - ფირფიტის სისქე,
- v - პუასონის კოეფიციენტი.

### 1.7. ამოცანების ვარიაციული ფორმულირება.

ფირფიტის დრეკადი პოტენციალის დაზუსტებული გამოსახულება.

ვარიაციული მეთოდით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის არსი.

წინა პარაგრაფში განხილული განტოლებები მექანიკის დეფორმირებულ სხეულის, ალბულის ზედაპირის სასაზღვრო პირობებთან ერთად არის დასრულებული ფორმულირება დრეკადობის თეორიის ამოცანის დიფერენციალური სახით. თუმცა ეს არ არის ერთადერთი ფორმულირება ამოცანის სხეულში დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის პოვნის.

თურმე ფუნქციების  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{\epsilon}$ ,  $\vec{u}$ , პოვნის ამოცანა, რომლებიც ახასიათებენ სხეულის მდგომარეობას, შესაძლებელია დაყვანილი იქნეს განსაზღვრული ინტეგრალის ამა თუ იმ სახის პოვნის, რომელსაც ჰქვია ფუნქციონალი, ხოლო ფუნქციებს რომლების ასახავენ სხეულის ნამდვილ მდგომარეობას, მოიძებნება ამ ფუნქციონალის ექსტრემუმიდან.

ვარიაციული პრინციპები ფართოდ გამოყენება სამშენებლო მექანიკაში.

უმეტესი ამოცანები დრეკადობის თეორიის დაიყვანება დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირებაზე მოცემული სასაზღვრო პირობებით. ზუსტი ამონახსნები ბევრი პრაქტიკისთვის მნიშვნელოვანი დღეისთვის არ არის ამოხსნილი, რადგან დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირება შეიცავს მათემატიკურ სირთულეებს. ამიტომ ვარიაციულმა მეთოდებმა შეიძინეს განსაკუთრებული მნიშვნელობა, რომლებიც გვაძლევენ ეფექტურ მიახლოებით ამონახსნებს, დიფერენციალური განტოლებების საკმარის საინჟინრო გამოთვლებისთვის.

ძირითადი არსი ვარიაციული მეთოდებით ფილების ლუნვის თეორიის ამოცანების ამოხსნის არის დაყვანა კერძო წარმოებულნი დიფერენციალური

განტოლებების წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე. ამისათვის მიახლოებითი მნიშვნელობები ჩალუნვის ფუნქციები  $\omega(x, y)$  წარმოვადგინოთ სასრული რაოდენობის წევრების მქონე მწკრივის სახით:

$$\omega_m(x, y) = \sum_{n=1}^m a_n \varphi_n \quad (1.27)$$

სადაც  $\varphi_n(x, y)$  - წრფივი დამოუკიდებელი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამოცანის გეუმეტრიულ სასაზღვრო პირობებს,  $a_n$ - მუდმივი საძიებელი პარამეტრებია.

### *რიტცის მეთოდი.*

$a_n$  პარამეტრების პოვნის სხვადასხვა მეთოდებიდან განვიხილოთ რიტცის მეთოდი. რიტცის მეთოდი ეფუძნება ცნობილ მექანიკის პრინციპებს, შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპს: იმისათვის, რომ სისტემა დამაგრებული იდეალური ბმებით იყოს წონასწორობაში, აუცილებელია და საკმარისია, რომ სისტემაზე მოდებული ძალების ელემენტარული მუშაობა ყველა შესაძლო გადაადგილებაზე ტოლი იყოს ნულის.

$$\delta W = 0 \quad (1.28)$$

ეს პირობა ნიშნავს, რომ სისტემის პოტენციალური ენერგიას (სრული ენერგია) აქვს ექსტრემალური მნიშვნელობა.

პოტენციალური ენერგიის მინიმუმის პრინციპი (ლაგრანჟ-დირიხლეს თეორემა): ყველა შესაძლო გადაადგილებებიდან დრეკადი სსეულის ჭეშმარიტია ის, რომლებიც აკმაყოფილებენ მდგრად წონასწორობას, ანიჭებენ სისტემის პოტენციურ ენერგიას მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამ პრინციპის თანახმად:

$$\delta W = 0, \quad \delta^2 W = 0 \quad (1.29)$$



სხეულის დეფორმაციის სრული პოტენციური ენერგია მინიმალურია და მდგრადია.

ფირფიტის სრული ენერგიის ფორმულაში (1.27)-ის ჩასმით ვღებულობთ  $\mathfrak{F}$ -ს ფუნქციის კვადრატულ გამოსახულებას  $a_n$  პარამეტრების მიმართ.

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(a_n) \quad (1.30)$$

რომ ვიპოვოთ  $a_n$  პარამეტრების მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამებიან სისტემის პოტენციალური ენერგიის მინიმუმს, საჭიროა ნულს გაუტოლოთ პოტენციური ენერგიის კერძო წარმოებულები.

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial a_n} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.31)$$

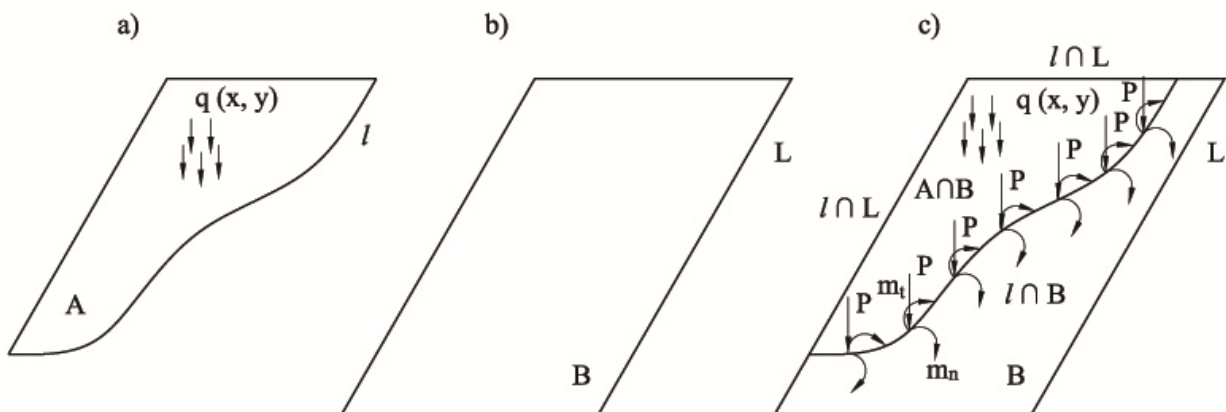
(1.31)-ე დამოკიდებულებები წარმოადგენენ  $n$  წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას  $m$  უცნობი  $a_n$  პარამეტრებით. სისტემის ამოხსნით და (1.27)-ში პარამეტრების ჩასმით ვღებულობთ მიახლოებით ამონახსნს ფირფიტის ღუნვის ამოცანის.

### 1.8. რთულკონტურიანი ფირფიტების გაანგარიშება მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდით.

გაფართოებულ ფილას აქვს იგივე მნიშვნელობა რაც ძირითად სისტემას სამშენებლო მექანიკაში (ნახ.1.8)

მეთოდის არსი: მოცემული ფირფიტა მოთავსებულია სხვა ძირითადი ფირფიტის არის შიგნით, რომელსაც აქვს მარტივი მოხაზულობის კიდეები. ის შეირჩევა ისეთნაირად, რომ კონტურები ძირითადი  $L$  და მოცემული  $l$  ფირფიტის, რომელიმე ნაწილში ემთხვეოდნენ ერთმანეთს ( $l \cap L$ ). ძირითად ფირფიტაზე მოქმედებს დატვირთვა რომელიც ინდენტურია მოცემული სისტემის  $A \cap B$ . დატვირთვა შეიძლება იყოს ნებისმიერი. მოვდით ძირითად ფირფიტას  $l \cap B$  კონტურზე კიდევ სამი ტიპის დატვირთვა: წრფეზე განაწილებული ძალის  $P$  სიდიდით და მომენტებით  $m_n$  და  $m_t$ , მათი ცვლილების კანონი  $l \cap B$  კონტურის გასწვრივ არის საძიებელი ფუნქციები. ეს უცნობები მოიძებნებიან სასაზღვრო

პირობებიდან მოცემული ფირფიტის ( $I \cap B$  კონტურის წერტილებისთვის). ამ პირობებისთვის დგება ძალთა მეთოდის კანონიკური განროლებათა სისტემა. ყველა უცნობების კოეფიციენტები (ერთეულოვანი ფაქტორები) გამოისხება გრინის გავლენის ფუნქციების დახმარებით, აგებული ძირითადი სისტემისთვის და მისი წარმოებულისგან.



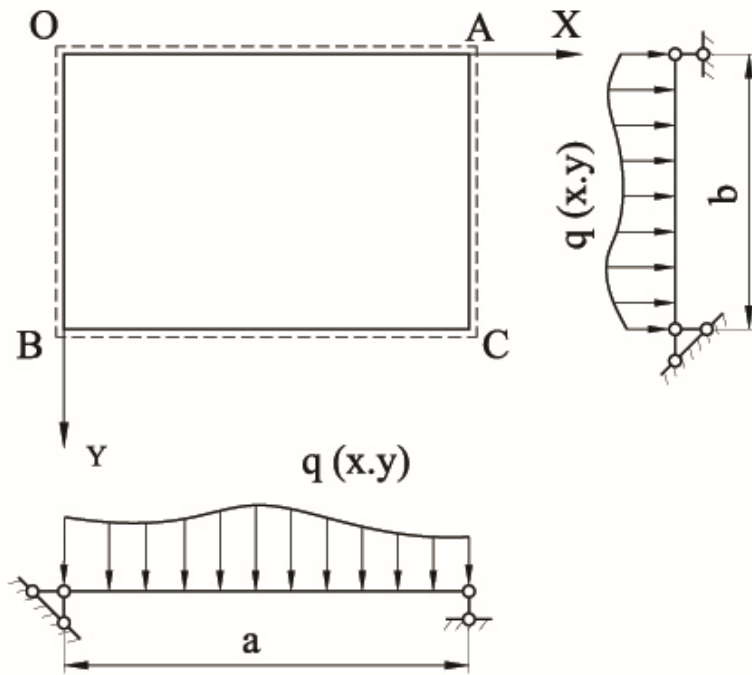
ნახ.1.8

კანონიკური განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შემდგომ შესაძლებელია ვიპოვოთ ჩალუნვები ნებისმიერი წერტილის კოორდინატით  $x$ -ით. მოცემული სისტემის.

### 1.9. სწორკუთხოვანი ფირფიტა. ნავეს ამონახსნი.

მართკუთხა ფილისთვის სოფი-ჟერმენის განტოლების ამონახსნი სასრული სახით შეუძლებელია, იძულებული ვართ ის ვეძებოთ უსასრულო მწკრივების სახით.

განვიხილოთ მართკუთხა ფირფიტა (ნახ.1.9), სახსრულად დაყრდნობილი კონტურით და დატვირთული განივი დატვირთვით ინტენსიობით  $q(x, y)$ , რომელიც იცვლება ნებისმიერი კანონით. კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ ფირფიტის კუთხეში. ფირფიტის ზომა  $x$  ღერძის მიმართულებით ტოლია  $a$ -სი, ხოლო  $y$  ღერძის მიმართულებით -  $b$ .



ნახ. 1.9

სოფე-ჟერმენის განტოლების ამონახსნი ვეძებთ ორმაგი სინუსების მწკრივის სახით:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (a)$$

სადაც  $A_{mn}$  – მწკრივის კოეფიციენტების მუდმივი რიცხვებია;

$m$  და  $n$  - მთელი დადებითი რიცხვებია 1, 2, 3,...

მწკრივი შეიძლება გაშლილი სახით წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ & + A_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \dots \end{aligned}$$

კონტურზე სახსრულად დაყრდნობილი ფირფიტისთვის სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\begin{cases} \text{როცა } x = 0 \text{ ი } x = a \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ ი } \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \end{cases} \quad (b)$$

და

$$\begin{cases} \text{როცა } y = 0 \text{ ი } y = b \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ ი } \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (c)$$

დავრწმუნდეთ, რომ მწკრივი (a) აკმაოფილებს ამ პირობებს. მართლაც ფირფიტის კიდეზე როცა  $x = 0$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0$$

და აქედან გამომდინარე ჩალუნვა  $\omega(0, y) = 0$ . კიდეზე როცა  $x = a$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0,$$

აქედან გამომდინარე  $\omega(a, y) = 0$ . ზუსტად ჩალუნვები ტოლია ნულის ფირფიტის კიდეებზე, როცა  $y = 0$  და  $y = b$ . ამრიგად სასაზღვრო პირობები (b) და (c) ჩალუნვებისთვის სრულდება.

მეორე წარმომებულები ჩალუნვების ტოლია:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

ამ წარმომებულებში შედის სინუსები იგივე არგუმენტის, რაც ჩალუნვების ფუნქციებში (a). ამიტომ მეორე რიგის წარმომებულები ჩალუნვების  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$  და  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$  ტოლია ნულის ფირფიტის კიდეებზე როცა  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ . ამრიგად სასაზღვრო პირობები (b) და (c) ლუნვითი ელემენტებისთვის ასევე კმაყოფილდება.

განვსაზღვროთ (ა) მწკრივის კოეფიციენტები. ამისათვის ჩავსვათ ჩალუნვის ფუნქცია (ა) სოფი-ჟერმენის განტოლებაში. გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$D\pi^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y). \quad (d)$$

რომ გავსაზღვროთ კოეფიციენტები შემავალი მარცხენა მხარეს (d) განტოლების საჭიროა ტოლობის მარჯვენა მხარეც გავშალოთ ტრიგონომეტრიული მწკრივის სახით. დატვირთვა წარმოვადგინოთ ორმაგი სინუსების ფურის მწკრივის სახით მართკუთხა არეზე  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , მივიღებთ:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (e)$$

ამ ფორმულის კოეფიციენტები გამოითვლება ცნობილი ფორმულით მათემატიკური ანალიზიდან:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (f)$$

(e) მწკრივის (d) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} D\pi^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

ორი მწკრივის ტოლობის პირობიდან ვღებულობთ:

$$D\pi^4 A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}.$$

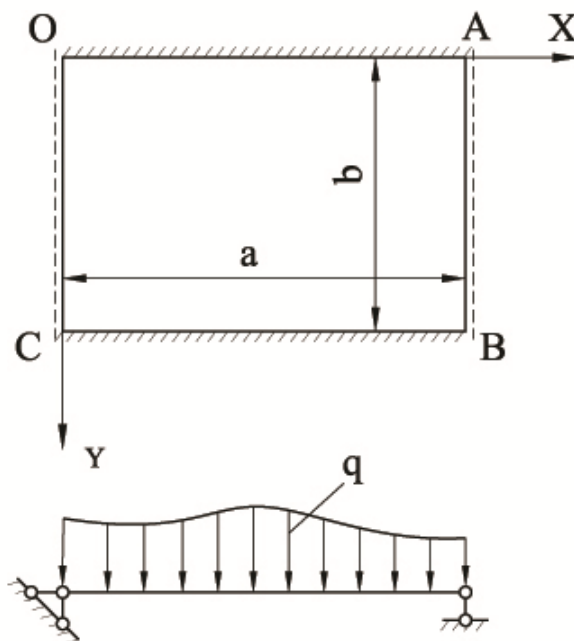
ჩავსვათ  $C_{mn}$  – ის მნიშვნელობები (f) ფორმულიდან, ვპოვულობთ კოეფიციენტებს (ა) მწკრივის, შემდეგი სახით:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (g)$$

ამრიგად ფუნქცია (a) არის ამონახსნი დასმული ამოცანის, რადგანაც ის აკმაყოფილებს ფირფიტის პირობებს კონტურზე და მწკრივის კოეფიციენტები, თუ მოიძებნება (g) სახით, რომელიც აკმაყოფილებს ფირფიტის ჩალუნვის დიფერენციალურ განტოლებებს. შემდგომი ამოცანის დაკონკრეტება დამოკიდებულია  $q(x, y)$  ფუნქციის სახეზე.

### 1.10. სწორკუთხოვანი ფირფიტა. ლევის ამონახსნი.

ნავიეს ამონახსნი განხილული წინა თავში გამოსადეგია მხოლოდ ოთკუთხა ფირფიტებისთვის, დაყრდნობილი სახსრულად კონტურზე. უფრო ზოგადი ამონახსნი არის მორის-ლევის ამონახსნი. ეს ამონახსნი გამოდგება ოთკუთხა ფირფიტისთვის, რომლის ორი მოპირდაპირე კიდე სახსრულად არის დაყრდნობილი, ხოლო ორი სხვა დყრდნობა ნებისმიერია: ხისტი ჩამაგრების, სახსრული დაყრდნობა, თავისუფალი კიდეებით.



ნახ. 1.10

ნახ.1.10-ზე გამოსახული ფირფიტა სახსრულად ეყრდნობა OC და AB კიდეებს. სასაზღვრო პირობებს ამ კიდეებისთვის აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \text{როცა } x = 0 \text{ ი } x = a \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ ი } \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \end{cases} \quad (a)$$

ეს პირობები, რომ დაკმაყოფილდეს საჭიროა ჩაღუნვის ფუნქცია ავიღოთ შემდეგი სახით:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} Y \sin \alpha x, \quad (b)$$

სადაც Y – ნებისმიერი ფუნქციაა y არგუმენტის;

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}.$$

როცა  $x = 0$  და  $x = a$

$$\sin \alpha x = 0,$$

ფუნქცია (b) აკმაყოფილებს ჩაღუნვის (a) პირობებს x და y ღერძების გასწვრივ:

იმისათვის, რომ შევამოწმოთ ღუნვის მომენტების პირობები (a) , გამოვთვალოთ (b) ჩაღუნვის ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულები (x; y):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} Y \alpha^2 \sin \alpha x, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} Y'' \sin \alpha x. \end{cases} \quad (c)$$

ეს წარმოებულები ანალოგიურია ჩაღუნვის ფუნქციის (b) როცა  $x = 0$  და  $x = a$  ტოლია ნულის, ამიტომ პირობა (a) მღუნავი მომენტებისთვის აგრეთვე სრულდება.

ფუნქცია (b) უნდა აკმაყოფილებდეს სოფი-ჟერმენის განტოლებას. ჩავსვათ (b) ფუნქცია განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (d)$$

(d) განტოლების ამოხსნისთვის მისი მარჯვენა მხარე გავშალოთ ფურიეს მწკრივის სახით:

$$\frac{q(x, y)}{D} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x. \quad (e)$$

კოეფიციენტები ფურიეს მწკრივის  $F_n(y)$  არის ფუნქცია  $y$ -ის. რადგან მწკრივის გაშლა ხდება ინტერვალში  $0 \leq x \leq a$ , ფურიეს მწკრივის  $F_n(y)$  – ს კოეფიციენტები ცნობილი მათემატიკური ანალიზის ფორმულით:

$$F_n(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha x \, dx. \quad (f)$$

ჩავსვათ მწკრივი (e) განტოლება (d) -ში:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x.$$

გავიტანოთ ჯამის ნიშანი ფრჩხილებს გარეთ, მივიღებთ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y - F_n(y)] \sin \alpha x = 0.$$

ეს პირობა სრულდება, თუ ყოველი წევრი მწკრივის ტოლია ნულის:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y - F_n(y) = 0,$$

ან

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y = F_n(y). \quad (g)$$

მეოთხე რიგის არაერთგვაროვანი დიფერენციალული განტოლების ამოხსნა (g) -სი ტოლია ამონახსნის საერთო ერთგვაროვანი განტოლების და ერთ-ერთი კერძო ამონახსნის (g) არაერთგვაროვანი განტოლების ჯამის, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:



$$Y_1^{IV} - 2\alpha^2 Y_1'' + \alpha^4 Y_1 = 0 \quad (h)$$

მისი ამონახსნის წარმოდგენა შეგვიძლია შემდეგნაირად:

$$Y_1 = A_n ch \alpha y + B_n y ch \alpha y + C_n sh \alpha y + D_n y sh \alpha y \quad (i)$$

$\overline{F}_n(y)$  -ით ავლნიშნოთ კერძო ამონახსნი (g) განტოლების, მისი ზოგადი ამონახსნს მივიღებთ შემდეგი სახით:

$$Y(y) = A_n ch \alpha y + B_n y ch \alpha y + C_n sh \alpha y + D_n y sh \alpha y + \overline{F}_n(y). \quad (j)$$

ჩავსვათ  $Y(y)$  ფუნქცია (b)-ში, მივიღებთ:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n ch \alpha y + B_n y ch \alpha y + C_n sh \alpha y + D_n y sh \alpha y + \overline{F}_n(y)] \sin \alpha x. \quad (k)$$

ეს ფუნქცია არის სოფი-ჟერმენის განტოლების ამონახსნი, განივი დატვირთვისას, ფირფიტის ზედაპირზე  $q(x,y)$  ინტენსივობის ნებისმიერი განაწილებული დატვირთვით ფირფიტის ზედაპირზე და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს სახსრულად დაყრდნობის OC და AB კიდეებზე.

### 1.11. ბუზნოვ-გალიორკინის მეთოდი.

ბუზნოვ-გალიორკინის მეთოდი ეფუძვნება ფუნქციების ორთოგონალობის თვისებებს. მათემატიკური ანალიზის კურსში მოცემულია შემდეგი განსაზღვრება ფუნქციების ორთოგონალობის: თუ მოცემულია ოჯახი უწყვეტი ფუნქციების

$$\Psi_0(x), \Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_k(x), \dots, \Psi_l(x), \dots, \Psi_n(x) \quad (a)$$

და ინტეგრალი ნებისმიერი ორი განსხვავებული ფუნქციის  $[a, b]$  -ე ინტერვალზე ტოლია ნულის:

$$\int_0^a \Psi_k(x) \Psi_{kl}(x) dx = 0 \quad (b)$$

ფუნქცია (a) წარმოადგენს შუალედში ორთოგონალურ ფუნქციებს.

მაგალითად, შემდეგი ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ოჯახი:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \quad (c)$$

არის ორთოგონალური სისტემა  $[-\pi, +\pi]$  ინტერვალზე.

მართლაც, ინტეგრალები:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lxdx = 0 \quad (k \neq l), \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lxdx = 0 \quad (k \neq l), \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos lxdx = 0. \end{array} \right. \quad (d)$$

ეს ამოწურავს ყველა შესაძლო კომბინაციას ორი სხვადასხვა ფუნქციისას (c) ოჯახიდან და ამტკიცებს, რომ ისინი ქმნიან ორთოგონალურ სისტემას  $[-\pi, +\pi]$  შუალედზე.

მათმატიკური ანალიზის ლევის თანახმად გამომდინარეობს, რომ ერთერთი ფუნქცია იგივეურად ტოლია ნულის, მაგალითად  $\Psi_k(x) = 0$ , ის ორთოგონალურია გამონაკლისის გარეშე ყველა ფუნქციისა, ამ შემთხვევაში პირობა (b) სრულდება. მაგალითის სახით შეგვიძლია მოვიყვანოთ შემდეგი ფუნქცია:

$$\Psi_k(x) = EJ\omega^{IV} - q, \quad (e)$$

რომელიც წარმოადგენს გაღუნული ღეროს განტოლებას. ეს ფუნქცია იგივეურად ტოლია ნულის ყველა მნიშვნელობისთვის

$$\int_L (EJ\omega^{IV} - q)\Psi_l(x)dx \equiv 0$$

აქ ინტეგრალი აიღება კოჭის მთელ სიგრძეზე L, ამრიგად (e) ფუნქციის მნიშვნელობები ორთოგონალურია  $[0, L]$  შუალედზე ნებისმიერი ფუნქციის მიმართ.

თუ ფუნქცია  $\omega(x)$ -ს შევცვლით მასთან მიახლოებულ მნიშვნელობებთან მოცემული მწკრივის სახით:

$$\omega_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi_m, \quad (f)$$

ეს ფუნქცია (e) უკვე არ იქნება იგივეურად ნულის ტოლი, რაც ნიშნავს იმას, რომ ის არ იქნება  $[0, L]$  შუალედის ნებისმიერი ფუნქციის ორთოგონალური.

შეგვიძლია მოვითხოვოთ, რომ მიღებული ფუნქცია ორთოგონალური იყოს ყოველ შემთხვევაში გარკვეული ფუნქციების კლასისთვის, მაგალითად  $\varphi_i$  რომელიც მოცემულია ( $f$ ) მწკრივის სახით და კმაყოფილდება პირობა:

$$\int_0^L (EJ\varphi_n^{IV} - q)\varphi_i dx \equiv 0 \quad (g)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

შედეგად მივიღებთ  $n$  წრფივ განტოლებებს ( $f$ ) მწკრივის  $a_i$  კოეფიციენტების გამოსათვლელად.

ბუზნოვ-გალერკინის მეთოდი დამყარებულია ( $g$ ) განტოლებათა სისტემის გამოყენებით  $a_i$  პარამეტრების გამოთვლაზე.

ყველა მსჯელობა რომელიც გამოყენებული იყო ერთი არგუმენტის მქონე ფუნქციისთვის შეიძლება გამოყენებული იქნეს ორი და მეტი არგუმენტის მქონე ფუნქციებისთვის. ფირფიტების ღუნვის ბუზნოვ-გალერკინის ამოცანის განტოლება ( $g$ ) შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\iint_S (D\nabla^4 \omega_{mn} - q)\varphi_{kl} dx dy = 0, \quad (h)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, m; \quad l = 1, 2, 3, \dots, n)$$

( $k = 1, 2, 3, \dots, m; \quad l = 1, 2, 3, \dots, n$ ) სადაც ღერძზე აღებული შუალედის ნაცვლად აღებული გვაქვს სიბრტყეზე არე  $s$ -ი, შემოსაზღვრული ფირფიტის კონტურით, ხოლო ფუნქცია  $\omega_{mn}$  წარმოვადგინოთ ორმაგი ტრიგონომეტრიული მწკრივის სახით  $s$  არეზე:

$$\omega_{mn}(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \varphi_{kl}(x, y) \quad (i)$$

ამრიგად მიახლოებით ( $h$ ) განტოლებებში, რომელიც წარმოადგენს ფირფიტის შუაზედაპირის ღუნვის დიფერენციალურ განტოლებას, ორთოგონალური ხდება ( $i$ ) მწკრივში შემავალ ყველა  $\omega_{kl}$  ფუნქციასთან.

ბუზნოვ-გალერკინის მეთოდს შეიძლება მივცეთ სხვა ინტერპრეტაცია.

ფუნქცია

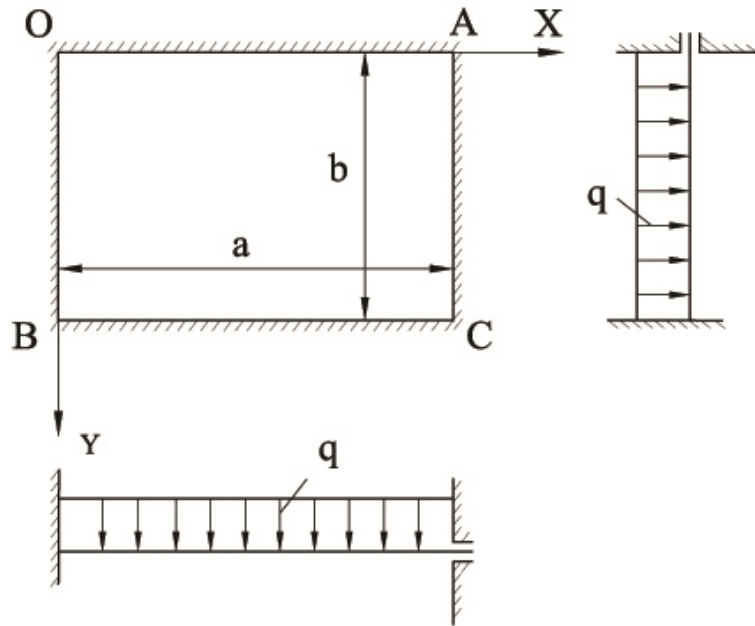
$$D\nabla^4\omega_{mn} - q$$

წარმოადგენს გეგმილს  $z$  ღერძზე ყველა გარე და შიდა ძალების, რომლებიც მოქმედებენ უსასრულოდ მცირე ფირფიტის ელემენტზე. ჩაღუნვების ფუნქცია  $\omega_{mn}$  მიმართულია იგივე ღერძის მიმართულებით.  $\varphi_{kl}$  ფუნქციებიც არის გადაადგილებები მიმართული  $z$  ღერძის მიმართულებით და ისინი შეიძლება ჩაითვალოს შესაძლო გადაადგილებად. ამრიგად ბუზნოვ-გალერკინის განტოლება ( $h$ ) მიახლოებით ტოლია ნულის მუშაობის შიდა და გარე ძალების შესაძლო  $\varphi_{kl}$  გადაადგილებაზე.

ამრიგად ბუზნოვ-გალერკინის მეთოდი, ასევე როგორც რიტცის-ტიმოშენკოს მეთოდი დამყარებულია შესაძლო გადაადგილების პრინციპზე, ორივე მეთოდი თანაბარუფლებსა. ორივე მეთოდში სააპრომაქციო ფუნქციებს ვირჩევთ ის, რომ ის აკმაყოფილდეს გეომეტრიულ სასაზღვრო პირობებს, ხოლო სტატიკური არაა აუცილებელი.

### **ბუზნოვ-გალერკინის მეთოდით ამოცანის ამოხსნის მაგალითი.**

ბუზნოვ-გალერკინის მეთოდის საილუსტრაციოთ განვიხილოთ ოთკუთხა ფილის ღუნვის ამოცანა, რომელიც ხისტად არის ჩამაგრებული კონტურზე და დატვირთულია თანაბრადგანაწილებული დატვირთვით. კორდინატების ადგილმდებარეობა ნაჩვენებია ნახ. 1.11-ზე.



ნახ. 1.11

ფირფიტის ჩამაგრების პირობიდან გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები OB და AC კიდეებზე:

$$\begin{cases} \text{როცა } x = 0 \text{ и } x = a \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ и } \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (a)$$

OA და BC

$$\begin{cases} \text{როცა } y = 0 \text{ и } y = b \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ и } \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (b)$$

რომ დაკმაყოფილდეს მოცემული პირობები, ჩალუნვის ფუნქცია ავირჩიოთ შემდეგი მწკრივის სახით:

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right), \quad (c)$$

სადაც ფუნქცია

$$\varphi_{kl} = \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right)$$

ყოველი წევრი მწკრივის აკმაყოფილებს ყველა სასაზღვრო პირობებს.

OB კიდეზე:

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

და  $\omega_n = 0$ . AC კიდეზე:

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=a} = \cos 2k\pi = 1$$

და  $\omega_n = 0$ . ზუსტად ასევე კმაყოფილდება ჩაღუნვების პირობა ( $b$ ) OA და BC კიდეებზე.

ფირფიტის კიდეებზე მობრუნების კუთხეების ნულთან ტოლობის შესამოწმებლად-ვითვლით წარმოებულებს  $\omega_n(c)$ -ს  $x$  და  $y$  -ით:

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial x} = \frac{2\pi}{a} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} k \sin \frac{2k\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right);$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial y} = \frac{2\pi}{b} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} l \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \sin \frac{2l\pi y}{b}.$$

OB კიდეზე:

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=0} = \sin 0 = 0$$

და ამიტომ წარმოებული  $\frac{\partial \omega_n}{\partial x} = 0$ . ზუსტად ასევე AC კიდესთვის:

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=a} = \sin 2k\pi = 0$$

და წარმოებული  $\frac{\partial \omega_n}{\partial x} = 0$ . ანლოგიურად OA და BC კიდეებზე წარმოებული  $\frac{\partial \omega_n}{\partial y}$  უდრის ნულს. ამრიგად ჩაღუნვის ფუნქცია ( $c$ ) აკმაყოფილებს ყველა სასაზღვრო პირობას ფირფიტის ( $a$ ) და ( $b$ ) ჩამაგრებისა.

$a_{kl}$  პარამეტრების გამოსათვლელად საჭიროა ბუზნოვ-გალერკინის განტოლებათა სისტემა შედგენა. პირველი მიახლოებისთვის შევინარჩუნოთ მწკრივის მხოლოდ პირველი წევრები (c) :

$$\omega_1 = a_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (d)$$

მაშინ  $\varphi_{kl}$  ფუნქცია ამ მწკრივის წევრისთვის იქნება

$$\varphi_{11} = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (e)$$

ჩავსვათ (d) და (e) მნშვნელობები განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ -16 \pi^4 a_{11} D \left[ \frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{2}{a^2 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - q \right\} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = 0.$$

და გარდაქმნების შემდგომ ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} & -16\pi^4 a_{11} D \left[ \frac{1}{a^4} \int_0^a \left( \cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^a \left( 1 - 2 \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy - \right. \\ & - \frac{2}{a^2 b^2} \int_0^a \left( \cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left( \cos \frac{2\pi y}{b} - \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy + \\ & \left. + \frac{1}{b^4} \int_0^a \left( 1 - 2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left( \cos \frac{2\pi y}{b} - \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy \right] - \\ & - q \int_0^a \left( 1 - 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left( 1 - \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy = 0. \end{aligned}$$

ინტეგრირების შემდგომ ვღებულობთ:

$$-16\pi^4 a_{11} D \left[ \frac{1}{a^4} \left(-\frac{a}{2}\right) \left(b + \frac{b}{2}\right) - \frac{2}{a^2 b^2} \left(-\frac{a}{2}\right) \left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{1}{b^4} \left(a + \frac{a}{2}\right) \left(-\frac{b}{2}\right) \right] - qab = 0$$

ან გამარტივების შემდგომ ვღებულობთ:

$$-16\pi^4 a_{11} D \left( \frac{3b}{4a^3} + \frac{1}{2ab} + \frac{3a}{4b^3} \right) - qab = 0$$

საიდანაც კოეფიციენტი

$$a_{11} = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \cdot \frac{1}{3 + 2a^2/b^2 + 3a^4/b^4}.$$

მიღებული  $a_{11}$  კოეფიციენტის ( $d$ ) ფორმულაში ჩასმით ვღებულობთ ჩალუნვის ფუნქციის მნიშვნელობას პირველ მიახლოებაში:

$$\omega_1 = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \cdot \frac{\left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)}{3 + 2a^2/b^2 + 3a^4/b^4}.$$

მაქსიმალური ჩალუნვა წარმოიქმნება ფირფიტის ცენტრში, როცა  $x = \frac{a}{2}$  და  $y = \frac{b}{2}$ .

კვადრატული ფირფიტისთვის როცა  $\frac{a}{b} = 1$ , მივიღოთ კოეფიციენტი პუასონის  $\nu = 0.3$  ტოლად, ვღებულობთ ჩალუნვის სიდიდის შემდეგ მაქსიმალურ მნიშვნელობას:

$$\max \omega_1 = \frac{qa^4}{(8\pi^4 D)} = \frac{qa^4}{(8\pi^4 E h^3)} 12(1 - \nu^2) = \frac{0.0140qa^4}{(E h^3)}. \quad (f)$$

ზუსტი მნიშვნელობა კვადრატული ფირფიტის თანაბრად განაწილებული დატვირთვის შემთხვევაში ტოლია:

$$\max \omega = \frac{0.0138qa^4}{(E h^3)}.$$

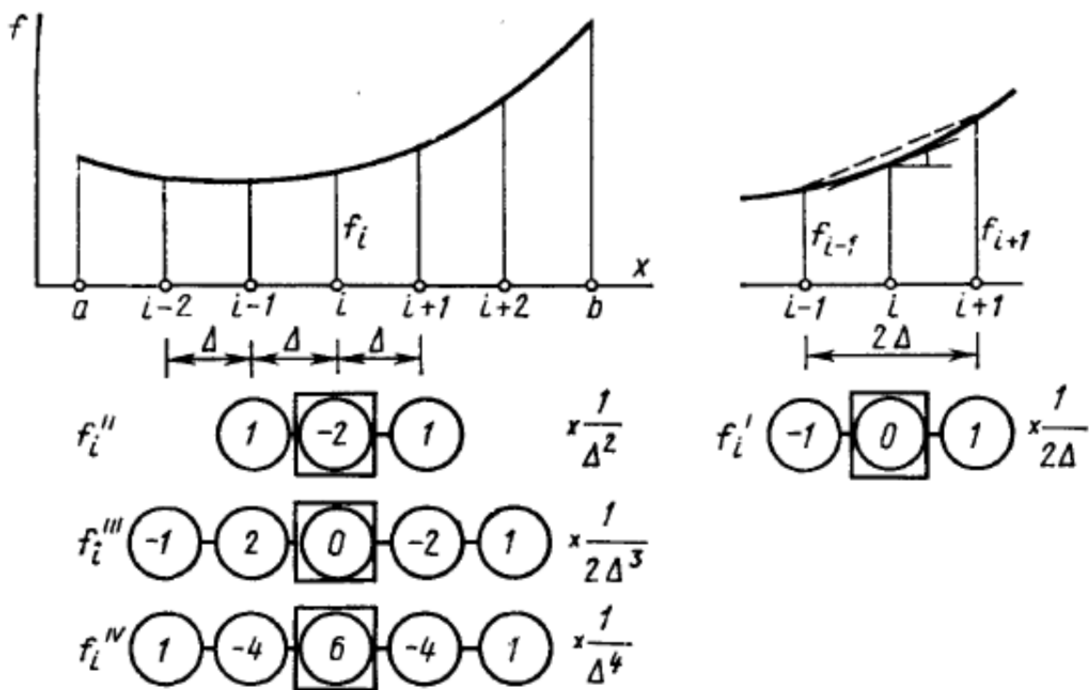
ამრიგად მიღებული პირველი მიახლოებით მაქსიმალური ჩალუნვა ( $f$ ) განსხვავდება ზუსტი მნიშვნელობისგან 15%-ით.

მღუნავი მომენტების და განივი ძალების გამოთვლისას მჭკრივების კრებადობა გაცილებით ცუდია.



### 1.12. სასრული სხვაობის მეთოდი.

ამ მეთოდს დიფერენციალური სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად ეძახიან ასევე ბადეთა მეთოდს. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში: განსახილველი სხეულის მთელი არე (სასაზღვრო ამოცანის არე) - კოჭის ღერძი, ფირფიტის ფართი, გარსის ზედაპირი და ა.შ. - იფარება წრფეთა ბადით, მათი გადაკვეთის წერტილებს ეწოდება კვანძები. უცნობებად მიღებულია ფუნქციების მნიშვნელობები კვანძებში.



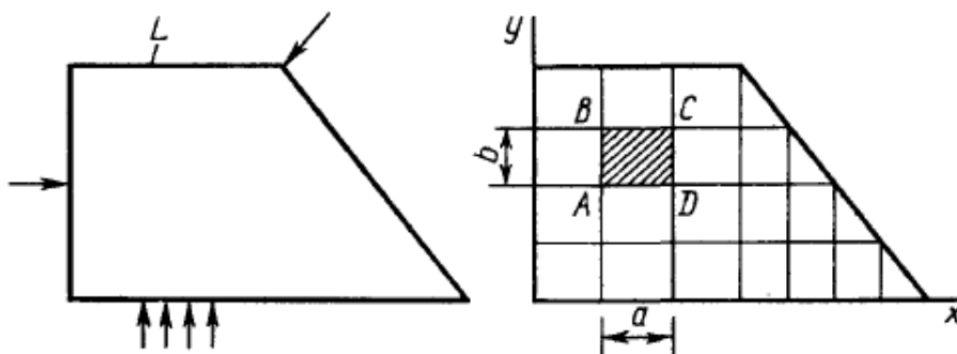
ნახ. 1.12

ამისათვის გამოყავთ მიახლოებითი ფორმულები ფუნქციების წარმოებულების კვანძებში ფუნქციების მნიშვნელობების დახმარებით (წარმოებულების სასრული სხვაობების ოპერატორი). ამ ოპერატორების ჩასმით დიფერენციალურ განტოლებებში და სრულდება მოთხოვნა, რომ დიფერენციალური განტოლებები კმაყოფილდებოდნენ ბადის ყველა კვანძში (ასეთ ხერხს მათემატიკაში ეძახიან კოლოკაციას). ამოცანის სასაზღვრო პირობებიც ფორმულირდება სასრული-სხვაობების ოპერატორით.

საბოლოოდ ვღებულობთ ალგებრულ გამტოლებათა სისტემას საძებნი ფუნქციების მიმართ, რომლის ამონახსნი გვაძლევს სხეულის რიცხვით ველის ფუნქციებს. წრფივი დიფერენციალური განტოლებისთვის სასრული-სხვაობითი განტოლებები წარმოადგენენ წრფივ ალგებრულ განტოლებების სისტემას. კომპიუტერების გამოყენებით შესაძლებელია შედგენა და ამოხსნა ასეთი განტოლებათა სისტემის მრავალი რიგის (რამოდენიმე ათასის ან რამოდენიმე ათეული ათასის განტოლების). სსმ არის მძლავრი მეთოდი დრეკადობის თეორიის გამოყენებითი ამოცანების და მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოხსნის.

### 1.13. სასრული ელემენტების მეთოდი.

სასრული ელემენტების მეთოდი არის მიახლოებითი მეთოდი უცნობი ფუნქციების პოვნის დაფუძნებული რომელიმე ვარიაციულ პრინციპზე. ის წარმოიშვა სამშენებლო მექანიკაში და მიიღო ფართო გავრცელება მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოხსნებში. სიტბოს გავრცელების, ჰიდრო და აეროდინამიკაში, ფილტრაციაში და სხვა უწყვეტი ტანის ამოცანების ამოხსნაში.



ნახ. 1.13

მას აქვს საკმაოდ ფართე მათემატიკური საფუძვლები. აქ ჩვენ განვიხილავთ შეზღუდულ მიმოხილვას ამ მეთოდის სამშენებლო მექანიკის პოზიციდან.

სამი ათეული წლების არსებობის მქონე ისტორიის და განვითარების ამ მეთოდის მრავალსახეობებიდან უფრო გავრცელება ჰპოვა, როცა ამოხსნა წარმოებს

გადაადგილებებში. ის დაკავშირებულია ლაგრანჟის ვარიაციულ პრინციპთან და შეიძლება გაგებული იქნეს, როგორც რიტის გაუმჯობესებული მეთოდი.

#### 1.14 პროგრამული კომპლექსი ЛИРА (ПК ЛИРА).

პროგრამული კომპლექსი ЛИРА (ПК ЛИРА) ეს არის სხვადასხვა დანიშნულების კონსტრუქციების გაანგარიშების და დაპროექტების მრავალფუნქციონალური პროგრამული კომპლექსი.

ЛИРА წარმატებით გამოიყენება სამშენებლო ობიექტებისგასაანგარიშებლად, აგრეთვე მანქანათმშენებლობაში, ხიდმშენებლობაში, ატომურ ენერჯიაში, ნავთობების მრეწველობასა და სხვა მრავალ სფეროში, სადაც აქტუალურია სამშენებლო მექანიკის მეთოდები.

პროგრამულ კომპლექსს აქვს 40 წლიანი არსებობის ისტორია, განვითარება და გამოყენება მეცნიერულ კვლევებში და კონსტრუქციის დაპროექტების პრაქტიკაში.

პროგრამული კომპლექსი ЛИРА შეუწყვეტილ ახორციელებს განახლებას. უახლესი წარმომადგენელია ПК ЛИРА ვერსია 9.6. ЛИРА ახორციელებს რიგ დაპროექტების პროცესებს: კონსტრუქციული ელემენტების დანიშვნას, ფოლადისა და ფოლადრკინაბეტონის კვთების შერჩევას და შემოწმებას მუშა ნახაზებისა და ესკიზების ფორმირებასთან ერთად.

ЛИРА იძლევა საშუალებას გამოვიკვლოთ საერთო მდგრადობა, შევამოწმოთ ელემენტების კვთების სიმტკიცე სხვადასხვა ნგრევის თეორიებზე.

ასევე შეიძლება ვიანგარიშოთ ობიექტები ფიზიკური და გეომეტრიული არაწრფივობის ჩათვლით, კონსტრუქციის აგებას ელემენტების მონტაჟისა და დემონტაჟის ჩათვლით.

ЛИРА შედგება რამდენიმე ურთიერთდაკავშირებულ საინფორმაციო სისტემებისაგან, როგორებიცაა: ЛИР-ВИЗОР, ЛИТЕРА, ФРАГМЕНТ, ЛИР-АРМ, ЛИР-СТК და სხვა.

ЛИРА-ს აქვს ინფორმაციული კავშირი სხვა ფართოდ გავრცელებულ CAD სისტემებთან, როგორებიცაა: AutoCAD, ArchiCAD, Hypersteel, Allplan, Фок-ПК და ა.შ.

მაღის ნაშენების განსახილველ კონსტრუქციაზე ვაყენებთ ნორმებით გათვალისწინებულ დროებით მოძრავ ვერტიკალურ დატვირთვას. შემდეგ, ჯერ კომპიუტერული პროგრამის ЛИРА-ს მეშვეობით ვანგარიშობთ და განსაზღვრავთ თითოეული კოჭის ჩაღუნვის ორდინატას, რის მიხედვითაც გავიანგარეშებთ განივი გადაცემის კოეფიციენტებს.

საანგარიშო პროგრამა ЛИРА აქვს მთავარი გრაფიკული სისტემა ЛИРА-ВИЗОР, როგორც საერთო გრაფიკული ნაწილი, რომელსაც გააჩნია დიდი შესაძლებლობები და სასრულ ელემენტარნი მოდელის ფორმირებისათვის ადეკვატური მტავალი ფუნქცია.

ЛИРА-ВИЗОР შესაძლებლობას გვაძლევს განვახორციელოთ ამ მოდელების დაწვრილებითი ვიზუალური გამოკლევა და მათი კორექტირება. ამავე ნაწილში ხდება ბმებისა და სხვადასხვა დატვირთების მიცემა, სხვადასხვა დინამიკური ზემოქმედების დახასიათება და აგრეთვე ხდება სხვადასხვა დატვირთვებს შორის კავშირის დამყარება იმისთვის, რომ განვიხილოთ ყველაზე საშიში მდგომარეობა.

შექმნილი მოდელის საანგარიშოდ შეიძლება არჩეულ იქნას ამ მოდელისათვის განკუთვნილი საანგარიშო პროცესორი. ПК ЛИРА შემადგენლობაში შედის რამდენიმე საანგარიშო პროცესორი. ყველა მათგანი განკუთვნილია კონსტრუქციაში დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად სასრულ ელემენტთა გამოყენებით.

ПК ЛИРА ბაზაზე არის შექმნილი საანგარიშო-გრაფიკული სისტემა МОСТ, რომელიც აგებს მოძრავი დატვირთვისაგან გამოწეულ სხვადასხვა სახის ფაქტორების გავლენის წირებს. გაანგარიშებები სრულდება ე. წ. „პროცესორების“ მეშვეობით.

წრფივი პროცესორი განკუთვნილია ისეთი ამოცანების ამოსახსნელად, რომლებიც აღწერენ კონსტრუქციის მასალის მუშაობის წრფივ-დრეკად მდგომარეობას.

არაწრფივი პროცესორი ისეთი ამოცანების ამოხსნის საშუალებას გვაძლევს, რომლებიც დაკავშირებულია მასალის ფიზიკურ არაწრფივობასთან არაწრფივი დრეკადობის თეორიის ფარგლებში და დრეკად-პლასტიკურ მდგომარეობაში (ბეტონი, რკინაბეტონი, ფოლადბეტონი, ლითონი, გრუნტი).

ასეთი ამოცანების ამოხსნა წარმოებს ბიჯოვანი და ბიჯოვან-იტერალური მეთოდით. არაწრფივი პროცესორი გვაძლევს ისეთი ამოხსნის საშუალებას, რომლებიც დაკავშირებულია გეომეტრიულ არაწრფივობასთან (ვანტები, დიდმალიანი მემბრანები და სხვა) აგრეთვე კონსტრუქციული არაწრფივობასთან (კონტურული ამოცანები, ერთმხრივი კავშირი, ხახუნი).

ბიჯოვანი მეთოდით არაწრფივი გამოსათვლელად წარმოებს დატვირთვის ბიჯის ავტომატური არჩევა მისი ისტორიის გათვალისწინებით.

გამოსათვლელი პროცესორები შეიცავენ სასრული ელემენტების დიდ ბიბლიოთეკას, რომელიც საშუალებას იძლევა გამოსათვლელი ობიექტების რეალური თვისებების აღწერას პრაქტიკულად შეუზღუდავად, გამოსათვლელის ადეკვატური მოდელის შექმნას. ამასთან შესაძლებელია მასალების წრფივი და არაწრფივი დეფორმაციის კანონების მოცემა და გეომეტრიული არაწრფივობის გათვალისწინება.

დასაშვების აბსოლუტურად ხისტი ჩანართების არსებობა, როგორც ღეროვან, ისე ბრტყელ სასრულ ელემენტებში. რეალიზებულია რკინაბეტონის სხვადასხვა კლასისი დეფორმირების კანონები.

დამხმარე გამოთვლითი პროცესორები საშუალებას გვაძლევენ ჩავატაროთ გამოსათვლელი მოდელის შემდგომი გამოკვლევები ძირითადი გაანგარიშების შედეგების მიხედვით.

PCY სისტმა საშუალებას გვაძლევს ექსტრემალური დატვირთვის კრიტერიუმით შევარჩიოთ ძაღვების ყველაზე საშიში თანწყობები, სხვადასხვა ქვეყნების ნორმატიული მოთხოვნების შესაბამისად.

სისტემა PCH საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ გადაადგილებათა, ძაღვათა და დატვირთვის სიდიდეები სტანდარტული და ნებისმიერი დატვირთვის წრფივი კომბინაციებისგან, ამასთან, სტანდარტულ წრფივ კომბინაციებად იგულისხმება კომბინაციები, რომლებიც დადგენილია ნორმატიული დოკუმენტებით.

УСТОЙЧИВОСТЬ სისტემა გვაძლევს საშუალებას ვაწარმოოთ გასაანგარიშებელი ნაგებობის საერთო მდგრადობის შემოწმება მარაგის კოეფიციენტისა და მდგრადობის დაკარგვის ფორმის განსაზღვრით.

ЛИТЕРА სისტემა ახდენს მთავარი და ექვივალენტური ძაღვათა გამოთვლის რეალიზაციას სხვადასხვა თეორიებით.

სისტემა ФРАГМЕНТ საშუალებას გვაძლევს განსაზღვროთ გამოსათვლელი ნაგებობის ერთი ფრაგმენტის ზემოქმედების ძალა სხვა ნაწილზე, როგორც დატვირთვა.

პროცესორი Вариации моделей ტოპოლოგიურად იდენტური სხვადასხვა საანგარიშო სქემების კომბინაციის საშუალებას იძლევა, სასაზღვრო პირობების ვარიანტების, სიხისტის მახასიათებლების, დრეკადი ფუძის პარამეტრების, კვანძების სიხისტისა და ა. შ. ცვლის გზით.

ЛИР-ВИЗОР-ის სისტემების შესაძლებლობები, რომლებიც გამოიყენება გამოთვლების შედეგების ასახვისას, საშუალებას გვაძლევს ვაწარმოოთ მოდელის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დეტალური ანალიზი იზოვლებით და ძაბვებით, ძაღვების, გადაადგილებების ეპიურებითა და ელემენტების რღვევის მოზაიკური სურათით, მთავარი და ექვივალენტური ძაბვებით, ძაღვების, გადაადგილების ეპიურებითა და ელემენტების რღვევის მოზაიკური სურათით, მთავარი და ექვივალენტური ძაბვებით, მდგრადობის დაკარგვის ფორმით, კონსტრუქციის რხევის ანიმაციით და ბევრ სხვა პარამეტრების მიხედვით.

ЛИР-ВИЗОР გვაძლევს ამომწურავ ინფორმაციას მთელი ობიექტისა და მისი ელემენტების მიხედვით სქემების ვიზუალიზაციისა და მისი დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის წარმოდგენით OpenGL გრაფიკაში.

სისტემები ЛИР-КС და ЛИР-КТС (სტანდარტული და თხელკედლიან კვეთების კონსტრუქტორი) წარმოადგენენ სპეციალიზირებულ გრაფიკულ გარემოს ნებისმიერი კონფიგურაციის ჭრილების ფორმირებისთვის. ეს სისტემა აღჭურვილია პროცესორებით, რომლებიც ითვლიან ღერძული, ღუნვის, გრეხვისა და გადაადგილების მახასიათებლების პარამეტრებს. გამოითვლება აგრეთვე ჭრილების სექტორალური მახასიათებლები, ღუნვისა და გრეხვის ცენტრების კოორდინატები, წინალობის მომენტები და განისაზღვრება კვეთის გულის ფორმა. მოცემულ კვეთში ძაღვის არსებობისას წარმოებს განაწილებული მიმდინარე, მთავარი და ექვივალენტური ძაბვების სურათის ასახვა, რომლებიც შეესაბამებიან მდგრადობის სხვადასხვა თეორიებს, აისახება აგრეთვე სექტორული მახასიათებლების ეპიურები.

ძირითადი და დამხმარე გამოთვლების ჩატარების შემდეგ ПК ЛИРА გვაძლევს საშუალებას ვაწარმოოთ აღნიშნული ობიექტის ფოლადის და რკინაბეტონის ელემენტების კონსტრუირება.

ЛИРА-ის ოჯახის ყველა პროგრამულ კომპლექსში სასრული ელემენტების მეთოდი (МКЭ) რეალიზებულია გადაადგილების ფორმაში - МКЭ განიხილება იმ

შემთხვევებისთვის, როდესაც საძიებელი ამომხსნელი ფუნქციას წარმოადგენს გადაადგილება. ეს იმითაა გამოწვეული, რომ MKჰ-თვის საანგარიშო სქემის შერჩევა გადაადგილების მიხედვით ადვილად ემორჩილება ალგორითმიზაციას.

აღსანიშნავია, რომ MKჰ-ს პრაქტიკულ გამოყენებას თანამედროვე კომპიუტერის გარეშეაზრი არა აქვს.

წონასწორობის განტოლება წრფივი მდგრადობის თეორიის ამოცანებისთვის ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$Au \equiv -B^T (DBu) + f = 0 \quad (1.32)$$

სადაც  $B$  – არის მატრიცული წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი, რომლის მეშვეობით დეფორმაციის ვექტორი  $\varepsilon(u)$  გამოისახება გადაადგილების ვექტორით  $u$ ,  $\varepsilon(u)=Bu$ ;

$D$  – მდგრადობის მატრიცაა, რომელიც განსაზღვრავს წრფივ დამოკიდებულებას  $\sigma$  ძაბვის ვექტორსა და  $\varepsilon$  დეფორმაციას შორის,  $\sigma=D \varepsilon$  (ჰუკის კანონი);

$B^T$  – ტრანსპონირებული მატრიცა.

აღვნიშნოთ:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (DBu)(Bu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u)\varepsilon(u) d\Omega \quad - \quad \text{დეფორმაციის პოტენციური ენერგია};$$

ენერგია;

$$W(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega \quad - \quad \text{გარეგანი ძალის მუშაობა};$$

$$I(u) = \Pi(u) + W(u) \quad - \quad \text{სრული ენერგია.} \quad (1.33)$$

დიფერენციალური ოპერატორის  $A$  დადებითი გარკვეულობა და თვითშეუღლებადობა საშუალებას გვაძლევს დიფერენციალური განტოლებების



(1.33) ამოხსნიდან სრული ენერჯის ფუნქციონალის მინიმუმის პოვნისკენ  $I(u)$  - ფუნქცია  $u$ , რომელიც იძლევა (1.33) ფუნქციონალის მინიმუმს, არის დიფერენციალური განტოლების (1.32) ამონახსნი. სრული ენერჯის ფუნქციონალი (1.33) წარმოადგენს ლაგრანჟის ფუნქციას.

ფუნქციონალის მინიმუმის (1.33) პირობას წარმოადგენს შესაძლო გადაადგილების ტოლობის პრინციპის განტოლებები: ყველა ნაბისმიერი შესაძლო გადაადგილებისას შიდა და გარე ძალების შესაძლო მუშაობის ჯამი  $v$  ნულის ტოლია.

აღვნიშნოთ:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (DBu)(Bv) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(v) d\Omega - \text{ შინაგანი ძალის შესაძლო მუშაობა,}$$

$$(f, v) = W(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega - \text{ გარეგანი ძალის შესაძლო მუშაობა.}$$

მაშინ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$a(u, v) + (f, v) = 0 \tag{1.34}$$

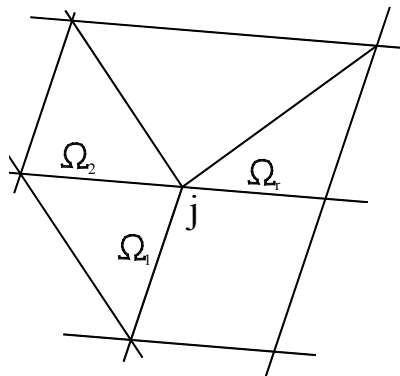
ფორმულის (1.34) მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს სრული ენერჯის ფუნქციონალის (1.33) წარმოებულს.

წონასწორობის განტოლების (1.32) ამოცანა და ფუნქციონალის (1.33) მინიმუმიზაციის ვარიაციული ამოცანის ამოხსნა, ანუ  $u$  ფუნქციის პოვნა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.34), ექვივალენტურია და აქვს ერთი და იგივე ამონახსნი.

განსაზღვრული უპირატესობა აქვს ამოცანის ვარიაციულ დაყენებას, რომლებიც იქიდან გამოდის, რომ წარმოებულების რიგი ფორმულაში (1.33) ქვეითდება 2- ჯერ. ზღვრული პირობების ფორმულირება ამიტომ უფრო მისახერხებელია, რბილდება ბაზისური ფუნქციის მიმართ მოთხოვნები და მარტივდება სხვაობათა გამოსახულებების წარმოდგენა.

სასრულ ელემენტთა მეთოდი - ვარიაციულია, ანუ ფუნქციონალის (1.33) მინიმუმის პოვნა წარმოებს (1.34) განტოლების საფუძველზე. МКЭ-ს ძირითადი კონცეფცია მდგომარეობს გამოსათვლელი სისტემის უშუალო დისკრტიზაციაში, რომელიც საანგარიშო ბადით ნაწევრდება სასრულ ელემენტებად. დისკრეტული მოდელის მისაღებად შემოჰყავთ ნაწილურ-უწყვეტი ფუნქციების  $\{\varphi_l(x)\}$  სისტემა, რომელიც განსაზღვრულია სასრული რაოდენობის ქვეუბნებზე - სასრული ელემენტების ვარსკვლავებზე (ნახ. 1.14), ე.ი.

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} \varphi_{lj}(x) & x \in \Omega_j \\ 0 & x \in \bar{\Omega}_j \end{cases}.$$



ნახ. 1.14 სასრული ელემენტების ვარსკვლავები

სისტემის უბნის ფარგლებში გადაადგილების საძიებო ფუნქცია  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$  მიახლოებით მიიღებს სახეს:

$$u_h(x) = \sum_{l=1}^L q_l \varphi_l(x), \quad (1.35)$$

სადაც  $L$  - უცნობი კვანძების საერთო რაოდენობაა, რაც ზოგად შემთხვევაში არ არის კვანძების რიცხვის ტოლი, რადგან თითოეულ კვანძში შეიძლება უცნობების სხვადასხვა რაოდენობა იყოს.

საკვანძო უცნობებს  $q_I$  MK3-ში, როგორც წესი, ეძლევა ფიზიკური აზრი და ისინი წარმოადგენენ გადაადგილებების საძიებელ მნიშვნელობებს და მათ წარმოებულს საანგარიშო ბადის კვანძებში.

თუ (1.35)-ს ჩავსვამთ (1.34)-ში, უწყვეტი ფუნქციის  $u(x)$  განსაზღვრის ამოცანა ემთხვევა  $q_I$  სასრული რაოდენობის უცნობების განსაზღვრის ამოცანას, რომლებსაც პოულობან შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_I} I(u_h) &= \frac{d}{dq_I} (\Pi(u_h) - W(u_h)) = \frac{\partial}{\partial q_I} \left( \frac{1}{2} a(u_h, u_h) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_I} \left( \frac{1}{2} a(\sum q_I \varphi_I, \sum q_I \varphi_I) - (f, \sum q_I u_h) \right) = \\ &= a(u_h, \varphi_I) + (f, \varphi_I) = \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Omega} DB \varphi_j B \varphi_I d\Omega + \int_{\Omega} f \varphi_I d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

როდესაც  $I=1, 2, \dots, L$ .

ამასთან ივარაუდება, რომ  $u_h(x)$  აკმაყოფილებს მთავარ სასაზღვრო პირობებს. (1.36)-დან ნაპოვნი  $q_I$  მნიშვნელობებით (1.35) ფორმულის მიხედვით განისაზღვრება ლობებით (1.35) ფორმულის მიხედვით განისაზღვრება უბანზე გადაადგილებების ფუნქცია, ხოლო დრეკადობის თეორიის ცნობილი დამოკიდებულებებით დამაბულ დეფორმირებული მდგომარეობის სხვა კომპონენტებიც.

აღვნიშნოთ:

$$\begin{aligned} K_{I,j} &= \int_{\Omega} (DB \varphi_j) B \varphi_I d\Omega = a(\varphi_j, \varphi_I) \\ P_I &= \int_{\Omega} f \varphi_I d\Omega = (f, \varphi_I) \end{aligned} \quad (1.37)$$

$K$  მატრიცას  $K_{IJ}$  ელემენტებით ეწოდებენ სიხისტის მატრიცას, ანუ MK3-ს განტოლებების სისტემის მატრიცას, ხოლო  $P$  ვექტორს  $P_I$  ელემენტებით - დატვირთვების გვამლევს წარმოვიდგინოთ გადაადგილების და გარე ძალების შესაძლო მუშაობები ჯამის სახით ცალკეულ ელემენტების მიხედვით: ვექტორს ანუ

მარჯვენა ნაწილების ვექტორს. აღნიშნოთ  $q$ -თი კვანძოვანი უცნობების ვექტორი. მაშინ (1.36) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ მატრიცის სახით:

$$K_q + P = 0 \quad (1.38)$$

გამოთვლების პირველ ეტაპზე სისტემის შესრულებული დანაწევრება სასრულ ელემენტებად საშუალებას

$$a(u, v) = \sum_r a_r(u, v), \quad (f, v) = \sum_r (f, v)_r$$

ეს საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ  $K$  მატრიცისა და ვექტორის  $P$  ელემენტები ცალკეული კომპონენტებისაგან. ასე, მაგალითად,  $K$  მატრიცის  $Ij$  ელემენტი და  $P$  ვექტორის  $I$  ელემენტი განისაზღვრება ფორმულით:

$$K_{Ij} = \sum_{r \in Ij} K_{Ujr}; P_I = \sum_{r \in I} P_{Ir},$$

სადაც  $r \in Ij$ ,  $r \in I$  (ჯამის ნიშნისთვის) - დაჯამება ყველა იმ ელემენტის მიხედვით, რომლებიც შეიცავენ  $I$  და  $j$  საკვანძო უცნობებს;

$K_{Ijr}$ ,  $P_{Ir}$  - სასრული ელემენტის სიხისტის მატრიცისა და საკვანძო ზალის  $r$  ვექტორის კომპონენტებია, რომლებიც განისაზღვრება (1.37)-ის ანალოგიურად

$$K_{Ijr} = \int_{\Omega_r} (B\phi_I)^T DB(\phi_j) d\Omega_r \quad (1.39)$$

$$P_{Ir} = \int_{\Omega_r} \phi_I^T f d\Omega_r \quad (1.40)$$

მასასადამე, МКЭ შესაძლებლობას გვაძლევს თითოეულ ცალკეულ სასრული ელემენტის განხილვის საფუძველზე შევქმნათ გადაწყვეტ

განტოლებათა სისტემა (1.36), რაც ძალზე მოსახერხებელია რეალიზაციაში და მეთოდის მნიშვნელოვან ღირსებად ითვლება.

ბაზისური ფუნქციის  $\{\varphi\}$  სისტემების შერჩევის შემდეგ, MKЭ-ში პროცედურა საკმაოდ ფორმალიზებულია.  $\{\varphi\}$  სისტემის შერჩევა - ყველაზე საპასუხისმგებლო ეტაპია, რადგან ის განსაზღვრავს მეთოდის კრებადობას, ამოცანის სიზუსტეს, (1.36) სისტემის ამოხსნადობას.

MKЭ-ს კუთვნილება ვარიაციული მეთოდებისადმი საშუალებას გვაძლევს ჩამოვყალიბოთ მოთხოვნები ბაზისურ ფუნქციებისადმი, რომლებიც უზრუნველყოფენ მის კრებადობას:

1) ბაზისური ფუნქციების სისტემა  $\{\varphi_i\}$  უნდა ეკუთვნოდეს  $A$  ამოცანის დიფერენციალური ოპერატორის  $HA$  ენერგეტიკულ სივრცეს, ეს ნიშნავს რომ მთავარი სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილებასთან ერთად გადამწყვეტ ფუნქციის წარმოსახვა  $u$  უნდა უზრუნველყოფდეს მთელ  $\Omega$  არეში იმ გადაადგილებების და მათ წარმოებულების არსებობას, რომლებიც შედიან (1.33) ფუნქციონალში. ელემენტები, რომელთა ბაზისური ფუნქცია აკმაყოფილებს ამ პირობებს, იწოდებიან ერთობლივ ან კონფორმულ ელემენტებად;

2) ფუნქციები  $\varphi_i$  უნდა იყვნენ წრფივად დამოუკიდებელია ეს მოთხოვნა აუცილებელია (1.36) სისტემის ამოსახსნელად;

3) ბაზისური ფუნქციების სისტემა  $\{\varphi_i\}$  უნდა იყოს სრული ოპერატორ  $A$ -ის ენერგეტიკულ სივრცეში. ეს ნიშნავს, რომ (1.35) ფუნქციებს ბადის შეუზღუდავად შემჭიდროვებისას შეეძლება ნებისმიერი შესაძლო გადაადგილებების ენერგეტიკული აზრით აპროქსიმირება  $\Omega$  მიდამოში ნებისმიერი წინასწარ მოცემული ხარისხის სიზუსტით.

ამ მოთხოვნათა შესრულება შესაძლებლობას იძლევა მივიღოთ MKЭ-ს საფუძველზე მიღებული გადაადგილებებისა და ძაბვების ცდომილების შეფასება:

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq c_u h^t \tag{1.41}$$

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{L_2} \leq c_\sigma h^\tau \quad (1.42)$$

სადაც  $u$ ,  $u_h$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma_h$  - შესაბამისად გადაადგილებებისა და ძაბვის ზუსტი და მიახლოებითი მნიშვნელობაა;

$L_2$  - კვადრატული შეუკვრელობის კონტუალური ანალოგია;

$c_u$ ,  $c_\sigma$  - მუდმივებია;

$h$  - სასრული ელემენტის მაქსიმალური ზომაა;

$t$ ,  $\tau$  - MKჰ-ს კრებადობის როგია გადაადგილებისა და ძაბვების მიხედვით.

მოყვანილ შეფასებას (1.41), (1.42) აქვს არა მხოლოდ თეორიული მნიშვნელობა, რომელიც საშუალებას იძლევა ვიმსჯელოთ MKჰ კრებადობაზე: ბადის შემჭიდროვებისას მიახლოებითი ამონახსნი  $u_h$  ესწრაფვის  $u$ -ს ზუსტი მნიშვნელობისკენ. ისინი სასარგებლოა პრაქტიკული გამოთვლებისასაც, რადგან მათ მიხედვით შეიძლება ვიქონიოთ წარმოდგენა ზუსტი ამონახსნის შესახებ.

განტოლებათა სისტემა (1.38) შეიძლება განხილული იქნას, როგორც წონასწორობის განტოლება. მის ანალოგს წარმოადგენს სამშენებლო მექანიკის ღეროვანი სისტემების გადაადგილებების მეთოდის კანონიკური განტოლებების სისტემები.

MKჰ-ში სიხისტის მატრიცის კომპონენტები გამოითვლება (1.37), (1.39) ფორმულებით, რომლებიც მიიღება ლაგრანჟის ფუნქციონალის მინიმიზაციით. სამშენებლო მექანიკის ღეროვანი სისტემებს ითვლიან, როგორც ერთეული გადაადგილების რეაქციას. თუ ბაზისური ფუნქციები აკმაყოფილებენ წონასწორობის ერთგვაროვან განტოლებებს ორივე მეთოდი გვაძლევს ერთიდაიგივე შედეგს.

გამოსახულება (1.38) ვექტორი I-ის კომპონენტების მისაღებად ღეროვანი სისტემის სამშენებლო მექანიკაში განხილულია, როგორც ადგილობრივი დატვირთვის კვანძებთან მიყვანის პროცედურა.

მაშასადამე, ამოცანის ამოხსნის პროცედურა MK3-თი მთლიანად შეესაბამება სამშენებლო მექანიკის ღეროვან სისტემებს. მნიშვნელო განსხვავება შეიძლება შეინიშნოს მხოლოდ სიხისტის მატრიცის შედგენის პროცედურაში: MK3-თვის ყოველთვის გამოიყენება ფორმულა (1.39). ღეროვან სისტემისათვის სიხისტის მატრიცა ხშირად იქმნება სხვა მოსაზრებით, მართალია, ღეროვანი სისტემებს ახასიათებს ერთი თავისებურება: ბრტყელი კვეთების ჰიპოთეზა, რომელიც უდევს საფუძვლად მათ გაანგარიშებებს, ერთის მხრივ, უზრუნველყოფს სასრულ ელემენტთა ერთობლიობას და მეორეს მხრივ წარმოქმნის ამოცანის დიფერენციალურ ოპერატორს. ამიტომ, აქ წარმოიშვება შესაძლებლობა შევარჩიოთ ისეთი ბაზისური ფუნქციები, რომლებიც ერთის მხრივ წარმოადგენენ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, მეორეს მხრივ, გვაძლევს შესაძლებლობას ავაგოთ ერთობრივი სასრული ელემენტები. ამ შემთხვევაში MK3 ღეროვანი სისტემებისათვის იქნება ზუსტი მეთოდი

$$EF \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \text{ და } EI \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = 0$$

სახის დიფერენციალური განტოლებების ზუსტი ამოხსნის თვალსაზრისით.

ამასთან ერთად შეიძლება მოვიყვანოთ მაგალითები, როდესაც ღეროვანი სისტემებისთვის უკეთესია გამოვიყენოთ მიახლოებითი ბაზისური ფუნქციები.

ასეთ მაგალითებს წარმოადგენს ღეროები ძვრის გათვალისწინებით, ღეროები დრეკად ფუძეზე, ფიზიკურად და გეომეტრიულად არაწრფივი ღეროები და სხვა. ამ შემთხვევაში ღეროვანი სისტემების გაანგარიშებას ახასიათებს MK3-ს ყველა განმასხვავებელ თავისებურება: მოახლოებული ამონახსნი, კრებადობის შეფასება (1.41, 1.42) სახით, სიგრძეში ღეროების დანაწევრების აუცილებლობა გაანგარიშების სიზუსტის ასამაღლებლად და ა.შ. სწორედ ამიტომ ПК ЛИРА

სასრული ელემენტების ბიბლიოთეკის აღწერისას ღეროებისთვის უჩვენებენ მნიშვნელობებს  $t$  და  $\tau$ .

ყველა სასრულ ელემენტს ენიჭება თავისი სიხისტის პარამეტრი. ღეროვანი ელემენტებისათვის პარამეტრები, რომლებიც განსაზღვრავს სიხისტეს, შეიძლება მოცემული იყოს ერთ-ერთ შემდეგი ხერხით:

\* პარამეტრები განპირობებული მასიური, კერძოდ ბეტონის, კვეთის ფორმით - დეფორმაციის მოდული და კვეთის ზომები.

\* რიცხვითი მახასიათებლები :  $EF$  - გრძივი სიხისტე;  $EI_y$  - ღუნვის სიხისტე  $Y_1$  ღერძის მიმართ;  $EI_z$  - ღუნვის სიხისტე  $Z_1$  ღერძის მიმართ;  $GJ_k$  - გრეხვის სიხისტე;  $GF_y$  - ძვრის სიხისტე  $Y_1$  ღერძის მიმართ;  $GF_z$  - ძვრის სიხისტე  $Z_1$  ღერძის მიმართ.

ამ მახასიათებლების რაოდენობა დამოკიდებულია ღეროვანი სასრული ელემენტის ტიპზე:

**ცხრილი 1.1**

სასრულ ელემენტის სახე	მიმნიჭებული სიხისტეები
1	$EF$
2	$EF, EI_y$
3	$EI_y, GJ_k$
4	$EF$
5, 10	$EF, EI_y, EI_z, GJ_k, GF_y, GF_z$

\* ფოლადის პროფილების და მათი კომბინაციების მახასიათებლები ტიპური კვეთების ბაზიდან.

\* არასტანდარტული ფორმის კვეთების მახასიათებლები, რომლებიც გამოითვლება ЛИРА-КС ან ЛИРА-КТС სისტემების მეშვეობით.



აგრეთვე შეიძლება მოცემული იყოს შემდეგი მახასიათებლები:

\* ხისტი ჩამატებები კოორდინატთა ადგილობრივი სისტემის ღერძების გასწვრივ;

\* კვეთების ბირთვული მანძილები - ორი რიცხვი ინერციის ყოველი ღერძისთვის რიცხვითი მახასიათებლების მოცემისას;

\* სუფთა მობრუნების კუთხის სიდიდე;

\* დრეკადი ფუძის პარამეტრები  $A$ ,  $C1$ ,  $C2$ , სადაც  $A$  - კვეთის სიგანე ან სიმაღლე,  $C1$  და  $C2$  - გრუნტის უკუბჯენის კოეფიციენტები პასტერნაკის მოდულის თანახმად;

\* სიხისტის მატრიცის შედგენისას ძვრის გათვალისწინების ნიშანთვისება;

\* ფიზიკური არაწრფივობის ნიშანთვისება.

ცხრილიდან აღებული კვეთებისათვის და ფოლადის ნაგლინის კვეთების ბაზის მიხედვით სიხისტეები გამოითვლება ავტომატურად.

ბრტყელ სასრულ ელემენტებს მიენიჭებათ შემდეგი მახასიათებლები:  $E$  (დრეკადობის მოდული),  $\nu$  (პუასონის კოეფიციენტი) და  $\delta$  (ელემენტის სისქე). მოცულობით სასრულ ელემენტებს მიენიჭებათ მახასიათებლები  $E$  და  $\nu$ .

### 1.15. პროგრამა „Matlab“-ი

პროგრამა „Matlab“-ი წარმოადგენს მაღალდონიან ტექნიკურ გამომთვლელ ენას და ინტერაქტიულ გარემოს ალგორითმების დასამუშავებლად. ის გამოიყენება მონაცემების ანალიზისთვის და მისი ვიზუალიზაციისთვის, რიცხვითი გათვლებისათვის. ტექნიკური გამომთვლელი ამოცანების უფრო სწრაფად ამოხსნა შესაძლებელია პროგრამა „Matlab“-ის გამოყენებით ვიდრე, ტრადიციული პროგრამირების ენების საშუალებით, ისეთი როგორცაა C, C++, Fortran.

პროგრამა „Matlab“-ის საშუალებით შესაძლებელია ფუნქციის გრაფილების აგება, განტოლებების ამოხსნა, სტატისტიკური ტესტების შესრულება და ბევრი

სხვა. შესაძლებელია გააერთიანოთ მათემატიკური გამოთვლები ტექსტთან და გრაფიკასთან იმისთვის, რომ მიიღოთ არულყოფილი ინტეგრირებადი ინტერაქტიული დოკუმენტები.

შესაძლებელია სიმულაციისა და მოდელირების წარმოქმნა (თუ გაქვთ წვდომა დამატებით პროგრამისთან Simulink-თან). შესაძლებელია ხმის და ანიმაციური გრაფიკის შექმნა. ასევე შესაძლებელია მასალების შექმნა ინტერნეტში ექსპორტირებისათვის.

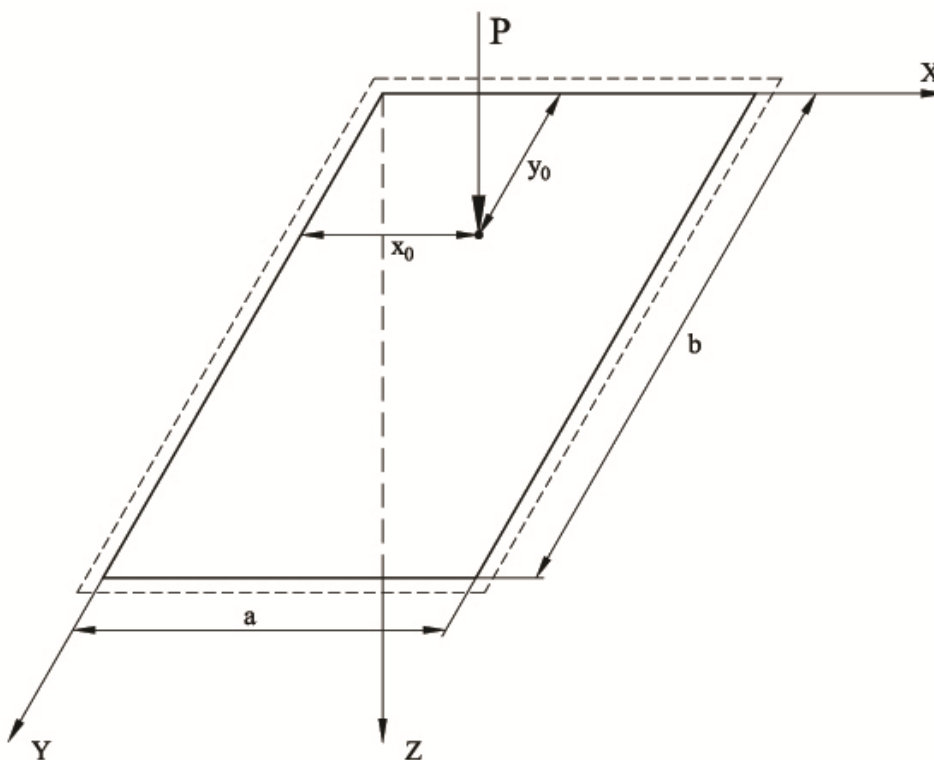
MATLAB (Matrix LABoratory - მატრიცული ლაბორატორია) დამუშავებულია ფირმით The Math Works Inc. (აშშ, ქ. ნეიტეკი, შტ. მასაჩუსეტსი).

## თავი II. კონტურზე სახსრულად დაყრდნობილი მართკუთხა ფირფიტის გაანგარიშება

განხილულია იზოტროპიული გეგმაში მართკუთხა ფორმის ფირფიტა (ნახ. 2.1), როგორც ძირითადი სისტემა რთული ფორმის ფირფიტების გაანგარისებისთვის მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდის [1]-ის გამოყენებით.

სისტემისთვის აგებულია გავლენის გრინის ფუნქცია რიტცის ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით [3]. სრული ენერჯის გამოსახულების შედგენისას, დეფორმაციის პოტენციური ენერჯია (შიდა ძალების პოტენციალი) გაანგარიშებული იქნა როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში არსებული გამოსახულებით [3], ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებით [4], [5].

ამოცანების ამოხსნა ზემოთმოყვანილი პირობების დაცვით განხორციელდა ორ ვარიანტად.



(ნახ. 2.1)

განვიხილოთ ერთგვაროვანი და იზოტროპიული ფირფიტის ღუნვის ამოცანა, როცა ფირფიტა კონტურზე დაყრდნობილია სახსრულად და დატვირთულია შეყურსული  $P$  ძალით მოდებული წერტილში კოორდინატებით  $X=X_0$  და  $Y=Y_0$

ჩალუნვის ფუნქციის გამოსახულებას ვიღებთ მწკრივის სახით:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \varphi_{mn} = \\ &= \omega_{11} \varphi_{11} + \omega_{12} \varphi_{12} + \omega_{21} \varphi_{21} + \omega_{22} \varphi_{22} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

სადაც ფუნქცია  $\varphi_{mn}$  აკმაყოფილებს ფილის სახსრულად დაყრდნობის სასაზღვრო პირობებს. კონტურით სახსრულად დაყრდნობილი ფირფიტისთვის გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{როცა } x = 0 \text{ და } x = a \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ და } \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (ა)$$

და

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{როცა } y = 0 \text{ და } y = b \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ და } \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (ბ)$$

დავრწმუნდეთ, რომ მწკრივი (2.1) აკმაყოფილებს ამ პირობებს. მართლაც ფირფიტის კიდეზე, როცა  $X=0$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0$$

შედეგად მივიღებ,  $\omega(0, y) = 0$ . კიდეზე როცა  $x = a$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0,$$

ხოლო ჩალუნვა  $\omega(a, y) = 0$ . ასევე ჩალუნვები ნულის ტოლია კიდეებზე  $y = 0$  და  $y = b$ . ამრიგად სასაზღვრო პირობები (ა) და (ბ) ჩალუნვებისთვის კმაყოფილდება.

მეორე წარმოებულები ჩაღუნვებისთვის:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = - \sum_m \sum_n \omega_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n \omega_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

ამ ფორმულებში შედის სინუსები იგივე არგუმენტებით, როგორც ჩაღუნვის ფუნქციაში (2.1). ამიტომ მეორე რიგის ჩაღუნვის წარმოებულები  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$  და  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$  ნულის ტოლია ფირფიტის ყველა კიდეზე, როცა  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ . ამრიგად სასაზღვრო პირობები (ა) და (ბ) ღუნვადი ელემენტებისთვის ასევე კმაყოფილდება.

(2.1) მწკრივის ელემენტების რაოდენობის მიხედვით, ამონახსნის მიღება შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით.

მუდმივ პარამეტრებს  $\omega_{mn}$  ირჩევენ პირობიდან, რომ ფუნქცია  $\omega_{mn}$  შესაძლებლობის მიხედვით რაც შეიძლება ზუსტად ასახავდეს საწყის ფუნქციას  $\omega(x, y)$ . მუდმივი პარამეტრების გამოთვლის სახვადასხვა მეთოდებიდან ვირჩევთ რიტცის მეთოდს.

გამოვთვალოთ სისტემის პოტენციური ენერგია:

$$\mathfrak{E} = U + \Pi; \tag{2.2}$$

### ვარიანტი „ა“

ფირფიტის დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი):

$$U = \frac{D}{2} \iint_S \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^2 dx dy \tag{2.3}$$

(2.3)-ის გათვალისწინებით (2.1) უდრის:

$$(2.1), (2.3) \Rightarrow U = \frac{D}{2} \iint_S \left( -\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \left( \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx dy =$$

$$= \frac{\pi^4 D}{2} \iint_S \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx dy \quad (2.4)$$

ორმაგი მწკრივის კვადრატში აყვანა, ტოლფასია ორი მრავალწევრის გადამრავლების, სადაც ყოველი წევრი პირველი მრავალწევრის მრავლდება მეორე მრავალწევრის ყოველ წევრზე და იღება ამ ნამრავლების ალგებრული ჯამი. რომ განვასხვავოთ ერთი მრავალწევრის წევრები მეორე მრავალწევრის წევრებისგან, ერთერთ მათგანში ინდექსები  $m$  და  $n$  შევცვალოთ შესაბამისად  $k$  და  $l$ -ით.

მაშინ გამოსახულება (2.4) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} (2.4) \Rightarrow U &= \frac{\pi^4 D}{2} \iint_S \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \cdot \\ &\cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_{kl} \left( \left( \frac{k}{a} \right)^2 + \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right) dx dy = \\ &= \frac{\pi^4 D}{2} \iint_S \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_{mn} \omega_{kl} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \left( \left( \frac{k}{a} \right)^2 + \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right) \cdot \\ &\cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy = \\ &= \frac{\pi^4 D}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_{mn} \omega_{kl} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \left( \left( \frac{k}{a} \right)^2 + \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right) \cdot \\ &\cdot \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi y}{b} dy \end{aligned} \quad (2.5)$$

ინტეგრალები შემავალი (2.5)-ში:

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad | \quad \text{при } m \neq k \\ \neq 0 \quad | \quad \text{при } m = k \end{array} \right\}; \quad \int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \quad (2.6)$$

ანალოგიურად პირველისა:

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi y}{b} dy \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad | \quad \text{при } n \neq l \\ \neq 0 \quad | \quad \text{при } n = l \end{array} \right\}; \quad \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \quad (2.7)$$

(2.6) და (2.7)-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$(2.5), (2.6), (2.7) \Rightarrow U = \frac{\pi^4 Dab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn}^2 \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 \quad (2.8)$$

სადაც

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

-ფირფიტის ცილინდრული სიხისტეა, E-დრეკადობის მოდული, h-ფირფიტის სისქე,  $\nu$ - პუასონის კოეფიციენტი.

ენერგია გარე ძალების (პოტენციური გარე ძალების) გამოითვლება ფორმულით:

$$\Pi = P \cdot \omega_p, \quad (2.9)$$

სადაც P შეყურსული ძალაა, მოდებული ფირფიტის წერტილში ( $x_0, y_0$ );

$\omega_p$  -ჩაღუნვა ძალის მოდების წერტილში

$$(2.1), (2.9) \Rightarrow \Pi = -P \cdot \omega(x_0, y_0) = -P \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}; \quad (2.10)$$

(2.8) და (2.10)-ის ჩასმით (2.2)-ში ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} (2.8), (2.10) \Rightarrow \mathcal{E} = U + \Pi = \\ = \frac{\pi^4 Dab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn}^2 \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 - P \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi^4 Dab}{8} \omega_{mn}^2 \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 - P \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \right); \quad (2.11) \end{aligned}$$

ცნობილი პოტენციური ენერჯიის მინიმუმის პრინციპი: ყველა შესაძლო დრეკადი გადაადგილებიდან, რომელიც აკმაყოფილებს მდგრად წონასწორობის პირობებს, ანიჭებს პოტენციურ ენერჯიას მინიმალურ მნიშვნელობას. შესაბამისად

მწკრივის კოეფიციენტები (2.11) უნდა შეირჩეს ისე, რომ პორენციურ ენერგიას ჰქონდეს მინიმალური მნიშვნელობა. ამ პრინციპზე დაყრდნობით უნდა დაკმაყოფილდეს პირობა:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \omega_{mn}} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\pi^4 Dab}{8} 2\omega_{mn} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 - P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} = 0$$

$$\omega_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\pi^4 Dab \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} \quad (2.13)$$

(2.13)-ის ჩასმით (2.1)-ში მივიღებთ:

$$\omega(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.14)$$

როცა  $P = 1$

$$(2.14), (P = 1) \Rightarrow \omega(x, y) = \frac{4}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.15)$$

ვღებულობთ წერტილის ჩალუნვის ფორმულას კორდინატებით  $(x, y)$  ერთეულოვანი ძალისგან, მოდებული წერტილში კორდინატებით  $(x_0, y_0)$ , ე.ი. ფირფიტის ჩალუნვა განისაზღვრება ფუნქციით:

$$\omega(x, y) = K(x, y; x_0, y_0). \quad (2.16)$$

### ვარიანტი „ბ“

განვიხილოთ იგივე ამოცანა. ამოვხსნათ ის იგივე მეთოდით, იგივე თანმიმდევრობით, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ პოტენციურ ენერგიას გამოვთვლით არა (2.3) ფორმულით, არამედ მოდიფიცირებული გამოსახულებით.



ნაშრომში (ავტორები ნ.შ. ბერიშვილი, რ.ვ. ჭყოიძე და რ.შ. გიორგობიანი) განხილულია ჰუკის განზოგადებული კანონი და მის საფუძველზე მიღებული დრეკადი პოტენციალი. ნაჩვენებია, რომ ჰუკის განზოგადებულ კანონში დეფორმაციისა და ძაბვის ტენზორების მთავარი დიაგონალის მიმართ სიმეტრიული კოეფიციენტების ტოლობა მიღწეულია ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის შეუსაბამობის წინასწარი დაშვებით, რის შედეგადაც არაკორექტული გამოდის დეფორმაციის ხვედრითი პოტენციალური ენერჯის გამოსახულებაც. ანიზოტროპიის ზოგადი შემთხვევისათვის ნაშრომში გარკვეულია ჰუკის განზოგადებულ კანონში და დრეკად პოტენციალში შემავალი წევრების რეალური ფიზიკური აზრი და მიღებულია შესაბამისად მათი კორექტული გამოსახულებები. დრეკადი პოტენციალი ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$U = \frac{D^*}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy; \quad (2.17)$$

სადაც

$$D^* = \frac{E h^3}{12};$$

$G$ - ძვრის მოდულია

(2.17) შევიტანოთ (2.1)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} (2.1), (2.17) \Rightarrow U &= \frac{D^*}{2} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \int_0^a \int_0^b \left( \left( -\omega_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left( -\omega_{mn} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \omega_{mn} \pi^2 \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)^2 \right) dx dy = \\ &= \frac{D^* \pi^4}{2} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \omega_{mn}^2 \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^4 + \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right) \int_0^a \int_0^b \left( \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx dy + \right. \\ &+ \left. \frac{4G}{E} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx dy \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.5; 2.6; 2.7)-ის გათვალისწინებით (2.18) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$U = \frac{\pi^4 D^* ab}{8} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \omega_{mn}^2 \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 \right) \quad (2.19)$$

გარე ძალების ენერჯიას (გარე ძალების პოტენციალი) გამოვთვლით ფორმულით (2.10). ჩავსვათ (2.2)-ში (2.10) და (2.19)-ის მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned} \Xi &= U + \Pi = \\ &= \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \left( \frac{\pi^4 D^* ab}{8} \omega_{mn}^2 \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - P \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \right); \end{aligned} \quad (2.20)$$

პოტენციური ენერჯიის მინიმუმის პრინციპის საფუძველზე ვღებულობთ:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \omega_{mn}} = 0 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4 D^* ab}{8} 2\omega_{mn} \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 \right) - P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} &= 0 \\ \omega_{mn}^* &= \frac{4P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\pi^4 D^* ab \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 \right)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2.22)-ის ჩასმით (2.1)-ში ვღებულობთ:

$$\omega^*(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 D^* ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2} \quad (2.23)$$

როცა  $P = 1$

(2.23), ( $P = 1$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega^*(x, y) = \frac{4}{\pi^4 D^* ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2} \quad (2.24)$$

ვღებულობთ ჩაღუნვების გამოსათვღელ ფორმულას კოორღინატებით  $(x, y)$ , ერთეუღოღანი ძაღისღან, რომელიღ მოღღებულია წერტიღში კოორღინატებით  $(x_0, y_0)$ , ე.ი. ჩაღუნვა ფიღის გამოითვღება ფუნქციით:

$$\omega(x, y) = K(x, y; x_0, y_0) \quad (2.25)$$

თუ წერტიღის  $(x, y)$  კოორღინატებს, რომღის გადაადღიღება გვანტერესებს ჩავთვღით მუღღმივად და ვცვღით ერთეუღოღანი ძაღის ადღიღმღღებარეობას  $(x_0, y_0)$ , გამოსახუღება  $\omega(x, y)$  გვამღღევს ჩაღუნვებს,  $(x_0, y_0)$  წერტიღში მოღღებულ  $P = 1$  ძაღისღან.  $K(x, y; x_0, y_0)$  ფუნქციას ეწოღება გრინის ფუნქცია, ხოღო მისღან მიღღებულ ზეღდაპირს - ფირფიტის ჩაღუნვის გავღენის ზეღდაპირი წერტიღში კოორღინატებით  $(x, y)$ . ფირფიტის ჩაღუნვის გავღენის ზეღდაპირი წერტიღში კოორღინატებით  $(x, y)$  წარმოადღენს ფირფიტის გაღუნულ ზეღდაპირს გამოწვეულს იმავე წერტიღში მოღღებულ ერთეუღოღანი ძაღისღან.

(2.15) და (2.24) ფორმულეღის შეღღარეღისთვის განვიხიღოთ შემღღეღი რიცხვითი მაღალითეღი:

$$a = b, x = x_0 = \frac{a}{2}, y = y_0 = \frac{b}{2}, \nu = 0.3, G = 8 \cdot 10^4 \text{ მპა}, E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ მპა} \quad (2.26)$$

მწკრივეღში შევინარჩუნოთ თითო წევრი:

$$(2.15), (2.26) \Rightarrow \omega(x, y) = 0,52 \cdot 10^{-4} \frac{a^2}{\pi^4 h^3}; \quad (2.27)$$

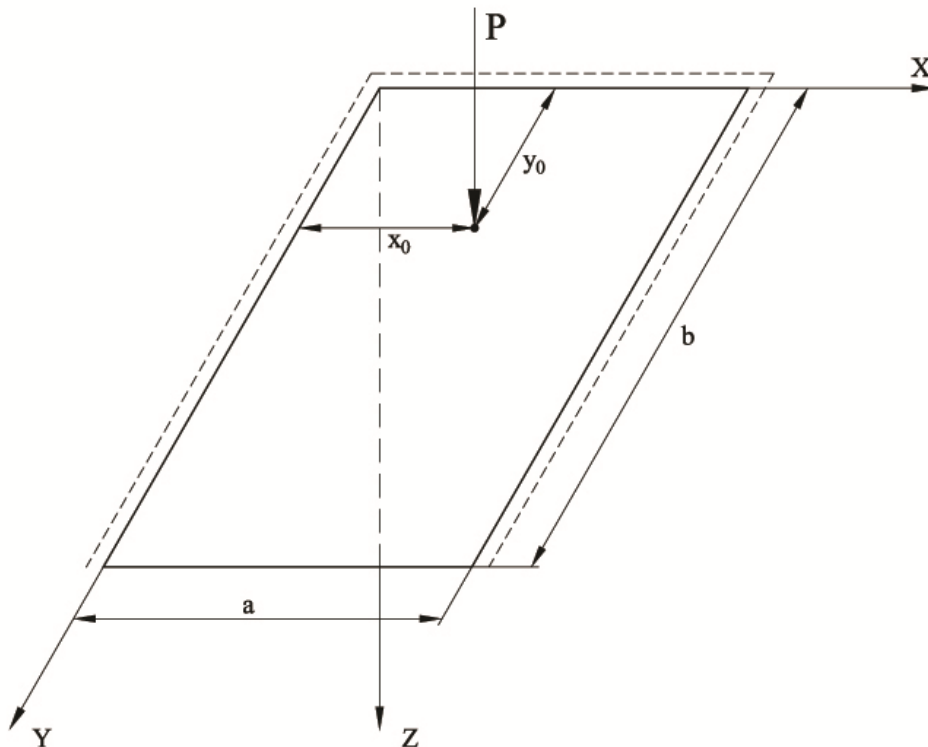
$$(2.24), (2.26) \Rightarrow \omega^*(x, y) = 0,65 \cdot 10^{-4} \frac{a^2}{\pi^4 h^3}. \quad (2.28)$$

განსხვავება 25%-ია.

### თავი III. სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი და მეოთხე გვერდზე თავისუფალი მართკუთხა ფირფიტის გაანგარიშება

განხილულია ოთკუთხა ფირფიტა (ნახ. 3.1), როგორც ძირითადი სისტემა გაგმაში რთული მოხაზულობის ფირფიტების გაასანგარიშებლად მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდის [1]-ის გამოყენებით. ძირითადი სისტემისთვის გამოითვლება გრინის გავლენის ფუნქცია, ენერგეტიკული რიტცის მეთოდის გამოყენებით [3]. სრული ენერჯის გამოსახულების შედგენისას, დეფორმაციის პოტენციური ენერჯია (შინაგანი ძალების პოტენციალი) გამოთვლილია როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში არსებული გამოსახულებებით [3], ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებებით [4], [5].

ზემოთმოყვანილი პირობების დაცვით ამოცანის ამოხსნა მოხდა ორ ვარიანტად.



(ნახ. 3.1)

განვიხილოთ გეგმაში ოთკუთხა ერთგვაროვანი და იზოტროპიული ფირფიტა, სახსრულად დაყრდნობილი სამ გვერდის კონტურზე და თავისუფალი მეთხე გვერდით, დატვირთული შეყურსული P ძალით მოდებული  $(x_0, y_0)$  წერტილში (ნახ. 3.1). ამოცანის ამოხსნისას გამოყენებული იყო რიტცის მეთოდი. ჩალუნვის ფუნქციის გამოსახულება მიღებულია მწკრივის სახით:

$$\omega_m = \sum_{n=1}^m a_n y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.1)$$

დავრწმუნდეთ, რომ მწკრივი (3.1) აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს: სახსრულად დაყრდნობილ კიდეებზე ჩალუნვები და მლუნავი მომენტები ტოლია ნულის (ნახ.3.1).

$$\begin{aligned} \omega_m(0, y) = \omega_m(a, y) = \omega_m(x, 0) &= \sum_{n=1}^m a_n y \sin \frac{n\pi 0}{a} = \\ &= \sum_{n=1}^m a_n y \sin \frac{n\pi a}{a} = \sum_{n=1}^m a_n 0 \sin \frac{n\pi x}{a} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$M_x = \frac{\partial \omega_m}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \omega_m}{\partial y^2} = - \sum_{n=1}^m a_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 y \sin \frac{n\pi x}{a} + \nu \cdot 0; \quad (3.3)$$

$$M_y = \frac{\partial \omega_m}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial \omega_m}{\partial x^2} = 0 - \nu \sum_{n=1}^m a_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 y \sin \frac{n\pi x}{a};$$

$$(3.3) \Rightarrow M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_y(x, 0) = 0 \quad (3.4)$$

ფირფიტის თავისუფალ კიდეზე მლუნავი მომენტები და განივი ძალები ტოლია ნულის (ნახ.3.1).

$$M_y = \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2}; \quad Q_y^{np} = -D \left( \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial x^2 \partial y} \right); \quad (3.5)$$

(3.3), (3.4), (3.5)-ი ფორმულების საფუძველზე

$$(3.3), (3.4), (3.5) \Rightarrow M_y(x, b) = Q_y^{np}(x, b) = 0 \quad (3.6)$$

ამრიგად მწკრივი (3.1) აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს.

მწკრივის კოეფიციენტების  $a_n$  – ის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ სისტემის სრული პოტენციური ენერგია:

$$\mathfrak{E} = U + \Pi; \quad (3.7)$$

### ვარიანტი "ა"

ფირფიტის დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი) გამოითვლება ფორმულით:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right) dx dy; \quad (3.8)$$

(3.1), (3.8)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} U &= \frac{D}{2} \sum_{n=1}^m \int_0^a \int_0^b \left( \left( -a_n y \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{a} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( - \left( a_n \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \right)^2 \right) \right) dx dy = \\ &= \frac{D}{2} \sum_{n=1}^m \int_0^a \int_0^b \left( a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^4 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} + 2(1-\nu) a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{a} \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.9)$$

ინტეგრირების (3.9) შემდგომ ვღებულობთ:

$$U = \frac{D}{4} \sum_{n=1}^m a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 ab \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right) \quad (3.10)$$

სადაც

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

-ცილინდრული სიხისტეა ფირფიტის,

E-დრეკადობის მოდული, h- ფირფიტის სისქე,  $\nu$ - პუასონის კოეფიციენტი.

შიდა ძალების ენერგია (პოტენციალი გარე ძალებისა გამოითვლება ფორმულით:

$$\Pi = - P \cdot \omega(x_0, y_0) \quad (3.11)$$

სადაც  $P$  –შეყურსული ძალაა, მოდებული ფირფიტის  $(x_0, y_0)$  წერტილში;

$\omega(x_0, y_0)$  – ჩალუნვა ძალის მოდების წერტილში.

$$(3.1), (3.11) \Rightarrow \Pi = -P \sum_{n=1}^m a_n y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}; \quad (3.12)$$

თუ ჩავსვავთ (3.10) და (3.12)-ს (3.7)-ში მივიღებთ:

(3.7), (3.10), (3.12)  $\Rightarrow$

$$\exists = \sum_{n=1}^m \left( \frac{D}{4} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 ab \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right) - P a_n y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} \right) \quad (3.13)$$

მუდმივი კოეფიციენტები(3.1) მწკრივის  $a_n$  გამოითვლება პოტენციური ენერჯიის მინიმუმის პირობიდან. გამოვთვლით (3.13) ფუნქციის წარმოებულებს  $a_n$  – ით და ვუტოლებთ ნულს, ვღებულობთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას  $a_n$  – ის მიმართ:

$$\frac{\partial \exists}{\partial a_n} = \frac{Dab}{4} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + (1-\nu) \right) a_n - P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} = 0 \quad (3.14)$$

აქედან ვპოვულობთ  $a_n$  – ს.

$$a_n = \frac{2P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{Dab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right)} \quad (3.15)$$

(3.15)-ის ჩასმით (3.1)-ში ვღებულობთ:

$$(3.1), (3.15) \Rightarrow \omega_m(x, y) = \sum_{n=1}^m \frac{2P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{Dab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right)} y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.16)$$

იმის მიხედვით, თუ რამდენ წევრს შევინარჩუნებთ მწკრივში (3.16) ჩაღუნვა ფირფიტის შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი სიზუსტის.

### ვარიანტი "ბ"

განვიხილოთ იგივე ამოცანა. ამოვხსნათ ის იგივე მეთოდით, იგივე თანმიმდევრობით, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ პოტენციურ ენერჯიას გამოვთვლით მოდიფიცირებული გამოსახულებით:

$$U = \frac{D^*}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy; \quad (3.17)$$

სადაც

$$D^* = \frac{Eh^3}{12};$$

$G$  – ძვრის მოდულია.

ჩავსვათ (3.1)-ი (3.17)-ში, მივიღებთ:

(3.1), (3.17)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \frac{D^*}{2} \sum_{n=1}^m \int_0^a \int_0^b \left( -a_n \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 y \sin \frac{n\pi x}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} a_n \right)^2 dx dy; \quad (3.18)$$

ინტეგრირების და გამარტივების შემდგომ ვღებულობთ:

$$U = \frac{D^*}{4} \sum_{n=1}^m a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 ab \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right) \quad (3.19)$$

(3.12) და (3.19)-ის დახმარებით (3.7) ვღებულობს:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^m \left( \frac{D^*}{4} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 ab \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right) - P a_n y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} \right) \quad (3.20)$$

პოტენციური ენერჯიის მინიმუმის პირობა:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a_n} = \frac{D^* ab}{2} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right) a_n - P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} = 0$$

საიდანაც ვპოვობთ  $a_n$  – ს:

$$a_n = \frac{2Py \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{D^* ab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right)} \quad (3.21)$$

ჩავსვათ (3.21) ჩალუნვის განტოლებაში (3.1)-ში, მივიღებთ:

$$(3.1), (3.21) \Rightarrow \omega_m^* = \sum_{n=1}^m \frac{2Py_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{D^* ab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right)} y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.22)$$

ერთეულოვანი დატვირთვისას, როცა  $P = 1$ , თუ  $(x, y)$  კოორდინატებს ჩავთვლით მუდმივად და ვცვლით ძალის კოორდინატებს  $(x_0, y_0)$ , მაშინ (3.16) და



(3.22) ფუნქციები გამოსახვენ ჩალუნვის დამოკიდებულებას ძალის მოდების წერტილის კოორდინატებზე  $(x_0, y_0)$ .

$$\omega_m(x, y) = K(x, y; x_0 y_0) = \sum_{n=1}^m \frac{2y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{Dab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right)} y \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (3.24)$$

$$\omega_m^*(x, y) = K(x, y; x_0 y_0) = \sum_{n=1}^m \frac{2y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{D^*ab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right)} y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.25)$$

მათ ეწოდებათ გრინის ფუნქციები, ხოლო მათ გრაფიკებს  $(x, y)$  წერტილში ჩალუნვის გავლენის გრაფიკი.

(3.24) და (3.25) ფორმულების გამოყენებით მიღებული შედეგების შედარებისთვის განხილულია შემდეგი რიცხვითი მაგალითები:

$$a = b, x = x_0 = \frac{a}{2}, y = y_0 = \frac{b}{2}, \nu = 0.3, G = 8 \cdot 10^4 \text{ Мпа} \quad (3.26)$$

მწკრივებში შევინარჩუნოთ მხოლოდ თითო წევრი:

$$(3.24), (3.26) \Rightarrow \omega = 1,17 \frac{a^2}{Eh^3 \pi^2}; \quad (3.27)$$

$$(3.25), (3.26) \Rightarrow \omega^* = 1,25 \frac{a^2}{Eh^3 \pi^2}; \quad (3.28)$$

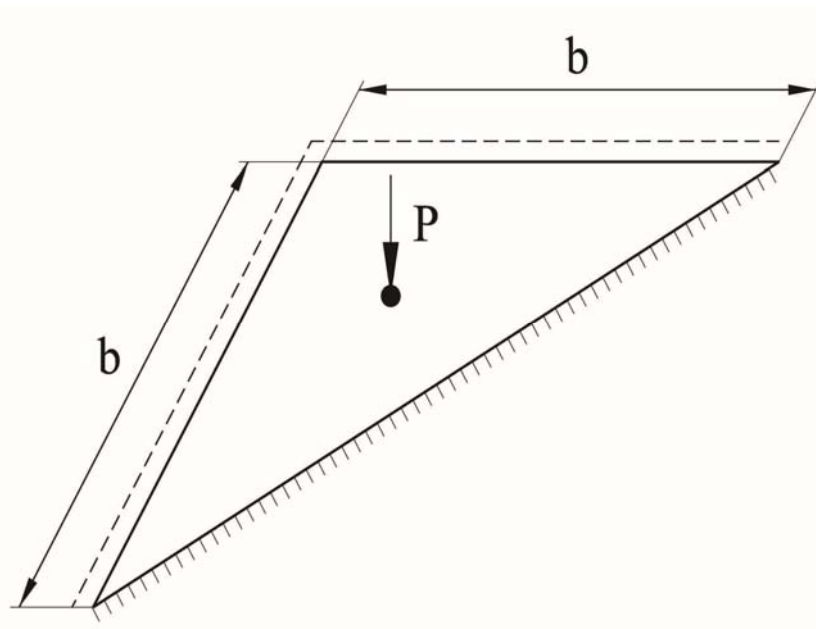
განსხვავება 7%-ია.

#### თავი IV. ორ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი და მესამე გვერდზე ხისტად ჩამაგრებული სამკუთხა ფირფიტის გაანგარიშება

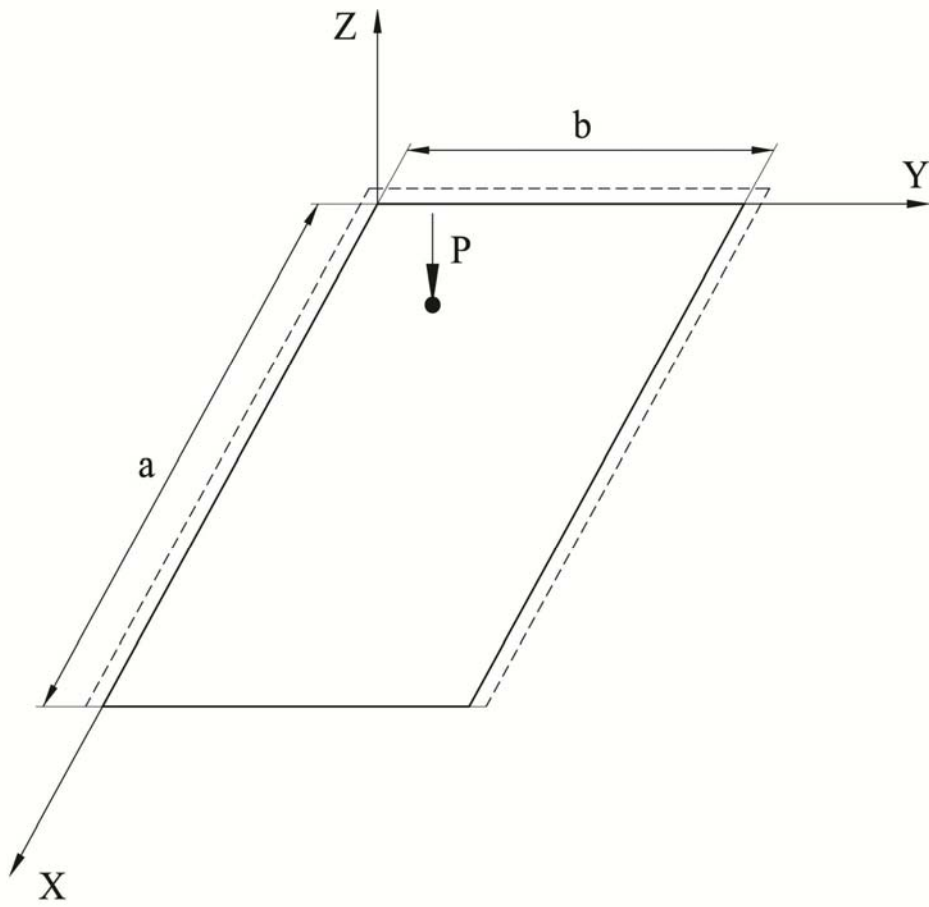
განხილულია სამკუთხა ფირფიტა AOB (როგორც გეგმაში რთული მოხაზულობის ფირფიტა), გვერდები AO, BO სახსრულად დაყრდნობილია, ხოლო გვერდი AB ხისტად ჩამაგრებული (ნახ. 4.1).

ფირფიტაზე მოქმედებს შეყურსული ძალა მოდებული ფირფიტის ცენტრში. ვსარგებლობთ მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდით (ძალთა მეთოდი) [1].

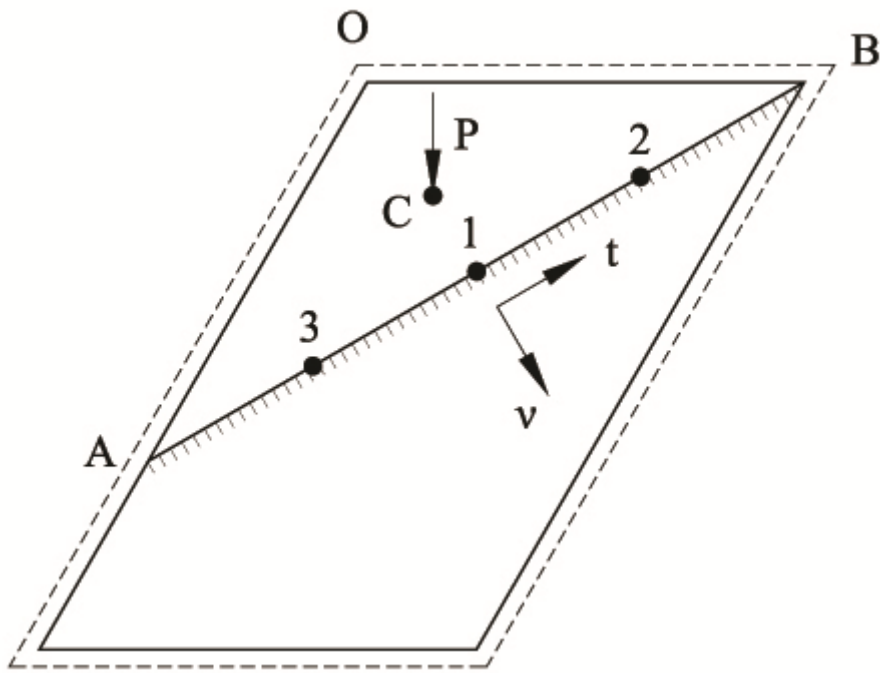
ძირითად სისტემად ვღებულობთ მოცემული ფირფიტის პარამეტრების შემცველ გეგმაში ოთკუთხა ფირფიტას სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილს, ხოლო მეოთხე გვერდით თავისუფალს (ნახ. 4.2). მოცემულ ფირფიტას ვათავსებთ ძირითადი სისტემის კონტურის შიგნით (ნახ. 4.3). ძირითადი სისტემა დატვირთულია იგივე დატვირთვით, როგორც მოცემული სისტემა.



ნახ. 4.1



Боб. 4.2



Боб. 4.3

მოცემული სისტემის გვერდები AO, BO ემთხვევა ძირითადი სისტემისას. მოცემული ფირფიტის AB გვერდზე, რომელიც გადის ძირითადი სისტემის შიდა არეში, ვიღებთ 3 წეტილს. ამ წერტილებისთვის ძალთა მეთოდის კანონიკურ განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (P_i W_{ki} + M_{vi} W_{vki} + M_{ti} W_{tki} + W_{qk} + W_{pk} + W_{mk}) = 0 ; \\ \sum_{i=1}^N (P_i \varphi_{ki} + M_{vi} \varphi_{vki} + M_{ti} \varphi_{tki} + \varphi_{qk} + \varphi_{pk} + \varphi_{mk}) = 0 ; \\ \sum_{i=1}^N (P_i \psi_{ki} + M_{vi} \psi_{vki} + M_{ti} \psi_{tki} + \psi_{qk} + \psi_{pk} + \psi_{mk}) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

(4.1) განტოლებაში მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$P_i$  – შეყურსული ძალა მომქმედი წერტილში  $i(\xi, \eta)$  ;

$M_{ti}$  – მომენტი, მომქმედი მხების მიმართულებით  $t$  ;

$W_{ki}, W_{vki}, W_{tki}$  -ჩალუნვები  $k$  წერტილში გამოწვეული  $i$  წერტილში მომქმედი შეყურსული  $P_i = 1$  ძალისა და მომენტებისაგან  $M_{vi} = 1$  და  $M_{ti} = 1$ ;

$N$  –საერთო წერტილების რაოდენობა აღებული კონტურზე საერთო არის;

$\varphi_{ki}, \varphi_{vki}, \varphi_{tki}$  –ნორმალის მობრუნების კუთხეები წერტილ  $k$  – ში,

გამოწვეული არე განაწილებული და შეყურსული  $P_i = 1$  ძალისგან და მომენტებისგან  $M_{vi} = 1$  და  $M_{ti} = 1$ ;

$\varphi_{qk}, \varphi_{pk}, \varphi_{mk}$  – ნორმალის მობრუნების კუთხეები  $v_k$  წერტილ  $k$  – ში,

გამოწვეული გარე განაწილებული და შეყურსული ძალისგან და მომენტებისგან;

$\psi_{qk}, \psi_{pk}, \psi_{mk}$  - მხების მობრუნების კუთხეები  $t_k$  წერტილში  $k$  -ში, მომქმედი  $i$  წერტილში შესაბამისად ერთეულოვანი ძალა  $P_i = 1$  და მომენტები  $M_{vi} = 1$  და  $M_{ti} = 1$ ;

$W_{qk}, W_{pk}, W_{mk}$  - ჩალუნვები, გამოწვეული შეყურსული ძალებიდან, განაწილებული დატვირთვისგან და შეყურსული მომენტებისგან.

ამ განტოლებების კოეფიციენტები (ერთეულოვანი ფაქტორები) გამოითვლება გრინის ფუნქციის დახმარებით, შედგენილი ძირითადი სისტემისთვის.

2 და 3 წერტილის სიმეტრიულობის გამო განიხილება მხოლოდ 1 და 2 წერილები. ამ წერილებისთვის კანონიკური განტოლებებიც შედგენა ხდება (4.1) დახმარებით.

$$AX=B \quad (4.3)$$

$$B = \begin{pmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \varphi_{p1} \\ \varphi_{p2} \\ \psi_{p1} \\ \psi_{p2} \end{pmatrix}; \quad (4.4)$$

$$X = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_{v1} \\ M_{v2} \\ M_{t1} \\ M_{t2} \end{pmatrix}; \quad (4.5)$$

$$A = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{v11} & \omega_{v12} & \omega_{t11} & \omega_{t12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{v21} & \omega_{v22} & \omega_{t21} & \omega_{t22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{v11} & \varphi_{v12} & \varphi_{t11} & \varphi_{t12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{v21} & \varphi_{v22} & \varphi_{t21} & \varphi_{t22} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{v11} & \psi_{v12} & \psi_{t11} & \psi_{t12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{v21} & \psi_{v22} & \psi_{t21} & \psi_{t22} \end{vmatrix}; \quad (4.6)$$

მატრიცა (4.5) -ის ელემენტები წარმოადგენენ კონტურის 1, 2, 3 წერტილებში მოქმედ უცნობ ძალოვან ფაქტორებს.

ელემენტები მატრიცების (4.4), (4.6) განისაზღვრებიან გავლენის ფუნქციის დახმარებით, აგებული ძირითადი სისტემისთვის (ნახ. 4. 2).

ამოცანების ამოხსნა მოყვანილია ორ ვარიანტად "ა" და "ბ".

გრინის ფუნქციის შედგენისას დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი), გამოითვლება როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში არსებული ფორმულით [3], ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებით [4], [5].

### ვარიანტი "ა"

კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში გრინის გავლენის ფუნქცია გეგმაში ოთკუთხა ფორმის, სახსრულად დაყრდნობილი სამ გვერდზე და თავისუფალი მეთხე გვერდით ფირფიტისათვის აქვს სახე (3.24):

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = K_m(x, y, x_0, y_0) &= \sum_{n=1}^m \frac{2 y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} \cdot y \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}}{Dab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + (1 - \nu)\right)} = \\ &= \sum_{n=1}^m V_n \cdot y_0 \cdot \sin \frac{n\pi x_0}{a} \cdot y \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \quad (4.7)$$

სადაც

$$V_n = \frac{2}{Dab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + 2(1-\nu)\right)} \quad (4.8)$$

### ვარიანტი "ბ"

ვარიანტი "ბ"-ში ფორმულა (4.7) - ის ნაცვლად გამოყენებულია დაზუსტებული გრინის ფორმულა (3.25):

$$\begin{aligned} \omega_m(x, y) = K(x, y; x_0, y_0) &= \sum_{n=1}^m \frac{2y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{D^* ab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{4G}{E}\right)} y \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} = \\ &= \sum_{n=1}^m V_n^* \cdot y_0 \cdot \sin \frac{n\pi x_0}{a} \cdot y \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \quad (4.9)$$

სადაც

$$V_n^* = \frac{2}{D^* ab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{4G}{E}\right)} \quad (4.10)$$

მატრიცის ელემენტები (4.4), (4.6) გამოითვლება ფორმულებით (4.11):

$$W_{vki} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial v_i} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial x_i} \cos(\widehat{v_l, x}) + \frac{\partial W_{ki}}{\partial y_i} \cos(\widehat{v_l, y}),$$

$$W_{tki} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial t_i} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial x_i} \cos(\widehat{t_l, x}) + \frac{\partial W_{ki}}{\partial y_i} \cos(\widehat{t_l, y}),$$

$$\varphi_{ki} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial v_{ik}} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial x_k} \cos(\widehat{v_k, x}) + \frac{\partial W_{ki}}{\partial y_k} \cos(\widehat{v_k, y}),$$

$$\psi_{ki} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial t_k} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial x_k} \cos(\widehat{t_k, x}) + \frac{\partial W_{ki}}{\partial y_k} \cos(\widehat{t_k, y}),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{vki} &= \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial v_i \partial v_k} = \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \cos(\widehat{v_l, x}) \cos(\widehat{v_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial x_k} \cos(\widehat{v_l, y}) \cos(\widehat{v_k, x}) + \\ &+ \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial y_k} \cos(\widehat{v_l, x}) \cos(\widehat{v_k, y}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial y_k} \cos(\widehat{v_l, y}) \cos(\widehat{v_k, y}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{tki} &= \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial t_i \partial v_k} = \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \cos(\widehat{t_l, x}) \cos(\widehat{v_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial x_k} \cos(\widehat{t_l, y}) \cos(\widehat{v_k, x}) + \\ &\frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_l, x}) \cos(\widehat{v_k, y}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_l, y}) \cos(\widehat{v_k, y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{vki} &= \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial v_i \partial t_k} = \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \cos(\widehat{v_l, x}) \cos(\widehat{t_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial x_k} \cos(\widehat{v_l, y}) \cos(\widehat{t_k, x}) + \\ &\frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_k, y}) \cos(\widehat{v_l, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_k, y}) \cos(\widehat{v_l, y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{tki} &= \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial t_i \partial t_k} = \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \cos(\widehat{t_l, x}) \cos(\widehat{t_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_l, x}) \cos(\widehat{t_k, y}) + \\ &\frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial x_k} \cos(\widehat{t_l, y}) \cos(\widehat{t_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_k \partial y_i} \cos(\widehat{t_k, y}) \cos(\widehat{t_l, y}), \end{aligned}$$



სადაც წარმოებულები (4.7)-ის ფუნქციის გამოითვლება:

$$\frac{\partial W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial W(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial W(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \cos \frac{n\pi}{b} y,$$

(4.12)

$$\frac{\partial^2 W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} = \sum_m \sum_n V_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{m\pi}{a} \xi \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} = \sum_m \sum_n V_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} \eta \cos \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial y} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{m\pi^2}{a} \frac{n}{b} \cos \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \cos \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial x} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{m\pi^2}{a} \frac{n}{b} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

კოსინუსების მნიშვნელობები შემავალი (4.11)-ში წერტილებისთვის 1, 2 განლაგებული AB გვერდზე (ნახ.4.3):

$$\cos(\widehat{v_{k(l)}, x}) = \cos(\widehat{v_{k(l)}, y}) = \cos(\widehat{t_{k(l)}, y}) = \cos 45 = 0.7071068,$$

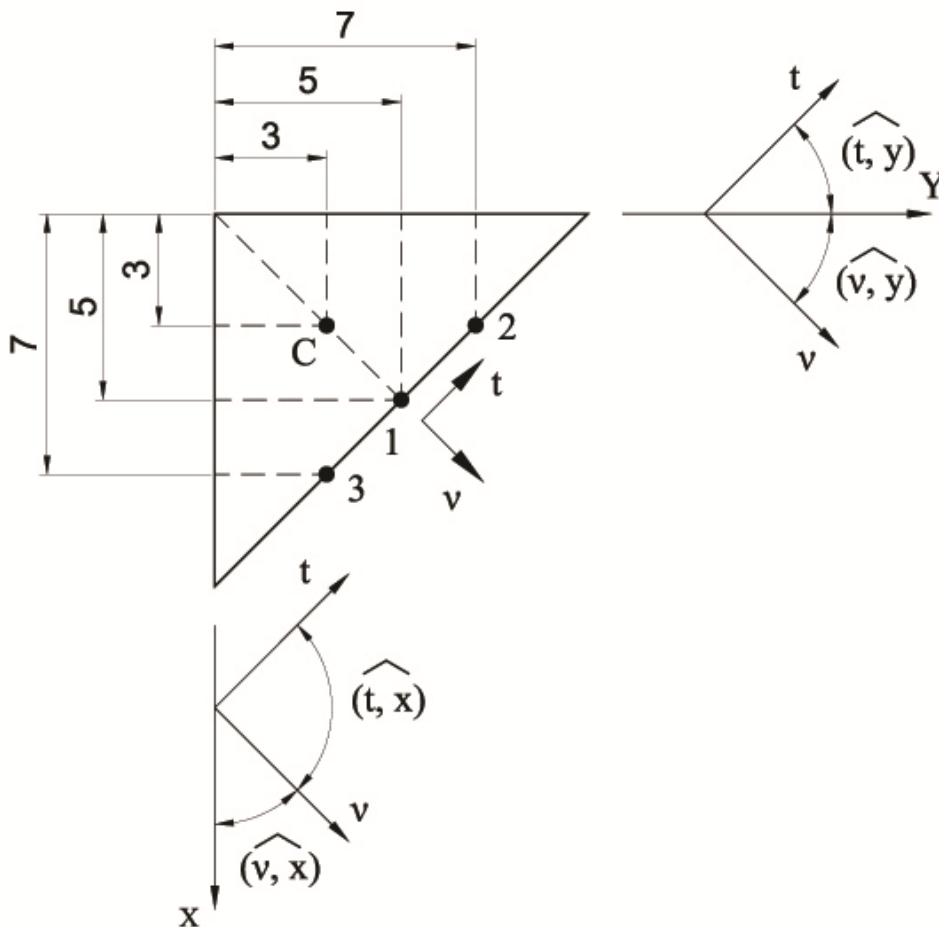
$$\cos(\widehat{t_{k(l)}, x}) = -\cos 45 = -0.7071068. \quad (4.13)$$

უცნობი ძალების გამოთვლის შემდგომ  $P_1; P_2; P_3; M_{v1}; M_{v2}; M_{v3}; M_{t1}; M_{t2}; M_{t3}$  – ჩაღუნვის პოვნა შეიძლება ფირფიტის ნებისმიერ წერტილში  $K(x, y)$  კოორდინატებით  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & P_1 \omega_k(x, y, x_1 y_1) + P_2 \omega_k(x, y, x_2 y_2) + P_3 \omega_k(x, y, x_3 y_3) + \\ & + M_{v1} \omega_{vk1}(x, y, x_1 y_1) + M_{v2} \omega_{vk2}(x, y, x_2 y_2) + M_{v3} \omega_{vk3}(x, y, x_3 y_3) + \\ & + M_{t1} \omega_{tk1}(x, y, x_1 y_1) + M_{t2} \omega_{tk2}(x, y, x_2 y_2) + M_{t3} \omega_{tk3}(x, y, x_3 y_3) + \\ & + P \omega_k(x, y, x_p y_p) \end{aligned} \quad (4.14)$$

### რიცხვითი მაგალითები

განხილულია სამკუთხა ფირფიტა შემდეგი პარამეტრებით (ნახ. 4.4)



ნახ. 4.4

C, 1, 2, 3 წერტილების კოორდინატები

C (3; 3); 1 (5; 5); 2 (3; 7); 3 (7; 3);

შეყურსული ძალა

$P=1 \cdot 10^4$  ნ ან 1 ტ.

გეომეტრიული ზომები

$a = b = 10 \vartheta \quad h = 20 \text{ ს}\vartheta$

მექანიკური მახასიათებლები

$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ მპა}; \quad G = 8 \cdot 10^4 \text{ მპა}; \quad \nu = 0.3;$

(4.15)

მოცემული პარამეტრებით (4.15) მატრიცის ელემენტები (4.4), (4.6) ლებულოვნ მნიშვნელობებს

### ვარიანტი "ა"

(4.8), (4.15)  $\Rightarrow$

$$V_1 = \frac{2}{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 10^2 \cdot 0,2^3}{12(1-0,3^2)} \left(\frac{1 \cdot 3,14}{10}\right)^2 \left(\frac{10^2}{3} \left(\frac{1 \cdot 3,14}{10}\right)^2 + 2(1-0,3)\right)} = 2,83 \cdot 10^{-10} (\vartheta^{-1})$$

$$\omega_{11} = V_1 \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot 5 \sin \frac{\pi 5}{10} = V_1 \cdot 25$$

$$\omega_{12} = V_1 \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot 7 \sin \frac{\pi 3}{10} = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 35 \cdot 0,8090 = V_1 \cdot 28,35$$

$$\begin{aligned} \omega_{\nu 11} &= V_1 \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi 5}{10} \cos 45^\circ + V_1 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cos 45^\circ = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} (0 + 5 \cdot 0,7071) = 3,55 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\nu 12} &= V_1 \left( 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ + 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} \cos 45^\circ \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} (35 \cdot 0,314 \cdot 0,5878 + 5 \cdot 0,8090) 0,7071 = 7,45 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{t 11} &= V_1 \left( 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi 5}{10} (-\cos 45^\circ) + 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cos 45^\circ \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 0,7071 = 3,55 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\omega_{t 12} = V_1 \left( 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi 3}{10} (-\cos 45^\circ) + 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) =$$

$$= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (35 \cdot 0,314 \cdot 0,5878 \cdot (-0,7071) + 0,8090 \cdot 5 \cdot 0,7071) =$$

$$= -1,65 \cdot V_1$$

$$\omega_{21} = V_1 \cdot 7 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} = 28,35 \cdot V_1$$

$$\omega_{22} = V_1 \cdot 7 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} = 32,34 \cdot V_1$$

$$\omega_{v21} = V_1 \cdot \left( 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cos 45^\circ \right) =$$

$$= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 7 \cdot 0,8090 \cdot 0,7071) = 4,06 \cdot V_1$$

$$\omega_{v22} = V_1 \left( 7 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ + 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) =$$

$$= 2,83 \cdot 10^{-10} (49 \cdot 0,8090 \cdot 0,314 \cdot 0,5878 \cdot 0,7071 + 7 \cdot (0,8090)^2 \cdot 0,7071) =$$

$$= 8,68 \cdot V_1$$

$$\omega_{t21} = V_1 \left( 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cos 45^\circ \right) =$$

$$= 2,83 \cdot 7 \cdot 0,8090 \cdot 0,7071 \cdot 10^{-10} = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 4,03 = 4,06 \cdot V_1$$

$$\omega_{t22} = V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \cos \frac{\pi 3}{10} (-\cos 45^\circ) + 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) =$$

$$= 2,83 \cdot 10^{-10} (49 \cdot 0,314 \cdot 0,8090 \cdot 0,5878 \cdot (-0,7071) + 7 \cdot (0,8090)^2 \cdot 0,7071) =$$

$$= 2,83 \cdot 10^{-10} (-5,15 + 3,28) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (-1,87) = -2,1 \cdot V_1$$

$$\varphi_{11} = V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) =$$

$$= 2,83 \cdot 10^{-10} (0 + 5 \cdot 0,7071) = 3,55 \cdot V_1$$

$$\varphi_{12} = V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) =$$

$$= 2,83 \cdot 10^{-10} (0 + 7 \cdot 0,8090 \cdot 0,7071) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 4,0257 = 4,03 \cdot V_1$$

$$\varphi_{v11} = V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \frac{\pi}{10} \cdot 5 \cdot (0,7071)^2 + 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (0,7071)^2 + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (0,7071)^2 + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (0,7071)^2 \right) =$$

$$= 2,83 \cdot (0 + 0 + 0 + (0,7071)^2) \cdot 10^{-10} = 0,504 \cdot V_1$$

$$\varphi_{v12} = V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (0,7071)^2 + 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (0,7071)^2 + \right.$$

$$+\sin \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (0.7071)^2) + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (0.7071)^2) = 1.04 \cdot V_1$$

$$\begin{aligned} \varphi_{t11} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (-0.7071) \cdot 0.7071 + \right. \\ &+ 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (0.7071)^2 + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (-0.7071) \cdot 0.7071 + \\ &\left. + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (0.7071)^2 \right) = 2.83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 0 + 0 + (0.7071)^2) = 0,504 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{t12} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (-0.7071) \cdot 0.7071 + \right. \\ &+ 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (0.7071)^2 + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (0.7071)^2 + \\ &\left. + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (0.7071)^2 \right) = 2.83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 0 + 7 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot (0.7071)^2 + \\ &+ 0.8090 \cdot (0.7071)^2) = 2.83 \cdot 10^{-10} \cdot 0.63 = -0.22 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (35 \cdot 0.5878 \cdot 0.7071 \cdot 0.314 + 5 \cdot 0.8090 \cdot 0.7071) = 7.45 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (49 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot 0.8090 \cdot 0.7071 + 7 \cdot (0.8090)^2 \cdot 0.7071) = \\ &= 8.44 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{v21} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \right. \\ &+ \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \left. \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 7 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot (0.7071)^2 + 0 + 0.8090 \cdot (0.7071)^2) = \\ &= 1.035 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{v22} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \right. \\ &+ \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \left. \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (49 \cdot (0.5878)^2 \cdot (0.314)^2 \cdot (0.7071)^2 + \\ &+ 7 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot 0.8090 \cdot (0.7071)^2 + 7 \cdot 0.8090 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot (0.7071)^2 + \\ &+ (0.8090)^2 \cdot (0.7071)^2) = 2.18 \cdot V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{t21} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi 3}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (\cos 45^\circ) + \right. \\
&+ 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (\cos 45^\circ) + \\
&+ \left. \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \right) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (35 \cdot (0.314)^2 \cdot 0.5878 \cdot 0 \cdot (-(0.7071)^2) + \\
&7 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot (0.7071)^2 + 0.8090 \cdot 5 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot (-(0.7071)^2) + \\
&+ 0.8090 \cdot 0.7071^2) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 0.64 - 0.37 + 0.41) = 1.035 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{t22} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (\cos 45^\circ) + \right. \\
&+ 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (\cos 45^\circ) + \\
&+ \left. \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \right) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (49 \cdot (0.314)^2 \cdot (0.5878)^2 \cdot (-(0.7071)^2) + \\
&7 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot 0.8081 \cdot (0.7071)^2 + 7 \cdot 0.8090 \cdot 0.5878 \cdot 0.314 \cdot (-0.7071) \cdot \\
&\cdot (0.7071) + (0.8090)^2 \cdot (0.7071)^2) = 1.16 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{11} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) = \\
&= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 5 \cdot 0.7071) = 3.55 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{12} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) = \\
&= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 7 \cdot 0.8090 \cdot 0.7071) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 4.13 = 4.06 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{v11} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \right. \\
&+ 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (\cos 45^\circ) + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \\
&+ \left. \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \right) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 0 + 0 + (0.7071)^2) = \\
&= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 0.5 = 0.504 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{v12} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \right. \\
&+ 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ) \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \\
&+ \left. \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \right) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 0 + 7 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot (0.7071)^2 +
\end{aligned}$$

$$+0.8090 \cdot (0.7071)^2) = 1.04 \cdot V_1$$

$$\begin{aligned}\Psi_{t11} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (\cos 45^\circ) + \right. \\ &+ \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (-\cos 45^\circ) + \\ &+ 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (\cos 45^\circ) + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \left. \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 0 + 0 + (0.71)^2) = 0.504 \cdot V_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{t12} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ)^2 + \right. \\ &+ \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot (\cos 45^\circ) + \\ &+ 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ) \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \left. \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0 + 7 \cdot 0.5878 \cdot 0.314 \cdot (-(0.7071)^2) + 0.8090 \cdot (0.7071)^2) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (-0.63 + 0.405) = -0.22 \cdot V_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (7 \cdot 0.314 \cdot 5 \cdot 0.5878 \cdot (-0.7071) + 5 \cdot 0.8090 \cdot 0.7071) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (-4.48 + 2.9) = -1.58 \cdot V_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{22} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} (7 \cdot 0.314 \cdot 0.5878 \cdot 7 \cdot 0.8090 (-0.7071) + 0.8090 \cdot 7 \cdot 0.8090 \cdot 0.7071) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (-6.1 + 3.86) = -2.24 \cdot V_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{v21} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \right. \\ &+ 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ) \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \\ &+ \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \left. \right) = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (35 \cdot 0.314^2 \cdot 0 \cdot (-0.7071 \cdot 0.7071) + \\ &+ 7 \cdot 0.314 \cdot 0.5875 \cdot (-0.7071 \cdot 0.7071) + 0 + 0.8090 \cdot (0.7071)^2) = \\ &= 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (-0.64 + 0.41) = -0.225 \cdot V_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{v22} &= V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \right. \\ &+ 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ) \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} (\cos 45^\circ)^2 = 2,83 \cdot 10^{-10} (49 \cdot 0,314^2 \cdot 0,5878^2 (-0,7071)^2) + \\
& + 7 \cdot 0,314 \cdot 0,5878 \cdot 0,8090 \cdot (-0,7071)^2 + 0,8090 \cdot 0,5875 \cdot 7 \cdot 0,314 \cdot (0,7071)^2 + \\
& + 0,8090^2 \cdot 0,7071^2 = -0,65 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{t21} & = V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ)^2 + \right. \\
& + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot \cos 45^\circ + \\
& \left. + 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \right) = \\
& = 2,83 \cdot 10^{-10} (0 + 0 + 7 \cdot 0,314 \cdot 0,5878 \cdot 0,7071 \cdot (-0,7071) + 0,8090 \cdot (0,7071)^2) = \\
& = 2,83 \cdot 10^{-10} (-0,64 + 0,4) = -0,24 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{t22} & = V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ)^2 + \right. \\
& + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) \cdot \cos 45^\circ + \\
& \left. + 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (\cos 45^\circ)^2 \right) = \\
& = 2,83 \cdot 10^{-10} (49 \cdot (0,5878)^2 \cdot (0,314)^2 \cdot (-0,7071)^2 + \\
& + 7 \cdot 0,8090 \cdot 0,5878 \cdot 0,314 \cdot (-0,7071)(0,7071)) = 0,14 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{p1} & = V_1 \cdot 5 \cdot \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 10^4 = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 0,8090 \cdot 10^4 = \\
& = 12,15 \cdot 10^4 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{p2} & = V_1 \cdot 7 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 10^4 = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 7 \cdot (0,8090)^2 \cdot 3 \cdot 10^4 = \\
& = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 0,66 \cdot 21 \cdot 10^4 = 13,86 \cdot 10^4 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{p1} & = V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) \cdot 10^4 = \\
& = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 0,8090 \cdot 0,7071 = 1,73 \cdot 10^4 \cdot V_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{p2} & = V_1 \left( 7 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) \cdot 10^4 = \\
& = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (0,5878 \cdot 7 \cdot 0,314 \cdot 3 \cdot 0,8090 \cdot 0,7071 + 3 \cdot (0,8090)^2 \cdot 0,7071) \cdot 10^4 = \\
& = 2,83 \cdot 10^{-10} \cdot (2,21 + 1,41) \cdot 10^4 = 3,61 \cdot 10^4 \cdot V_1
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\psi_{p1} &= V_1 \left( 5 \cdot \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ \right) \cdot 10^4 = \\ &= 2.83 \cdot 10^{-10} \cdot 1.73 \cdot 10^4 = 1.73 \cdot 10^4 \cdot V_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{p2} &= V_1 \left( 7 \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) \cdot 10^4 = \\ &= 2.83 \cdot 10^{-10} (7 \cdot 0.5878 \cdot 0.314 \cdot 3 \cdot 0.8090 (-0.7071) + 3 \cdot (0.8090)^2 \cdot 0.7071) \cdot 10^4 = \\ &= 2.83 \cdot 10^{-10} \cdot (-2.21 + 1.41) \cdot 10^4 = -0.8 \cdot 10^4 \cdot V_1\end{aligned}$$

### ვარიანტი "ბ"

$$V_1^* = 3.03 \cdot 10^{-10}$$

$$\omega_{11} = V_1^* \cdot 25$$

$$\omega_{12} = V_1^* \cdot 28.35$$

$$\omega_{v11} = V_1^* \cdot 3.55$$

$$\omega_{v12} = V_1^* \cdot 7.45$$

$$\omega_{t11} = V_1^* \cdot 3.55$$

$$\omega_{t12} = V_1^* \cdot (-1.65)$$

$$\omega_{21} = V_1^* \cdot 28.35$$

$$\omega_{22} = V_1^* \cdot 32.34$$

$$\omega_{v21} = V_1^* \cdot 4.06$$

$$\omega_{v22} = V_1^* \cdot 8.68$$

$$\omega_{t21} = V_1^* \cdot 4.06$$

$$\omega_{t22} = V_1^* \cdot (-2.1)$$

$$\varphi_{11} = V_1^* \cdot 3.55$$

$$\varphi_{12} = V_1^* \cdot 4.03$$

$$\varphi_{v11} = V_1^* \cdot 0.504$$

$$\varphi_{v12} = V_1^* \cdot 1.04$$

$$\varphi_{t11} = V_1^* \cdot 0.5$$

$$\varphi_{t12} = V_1^* \cdot (-0.22)$$

$$\varphi_{21} = V_1^* \cdot 7.45$$

$$\varphi_{22} = V_1^* \cdot 8.43$$

$$\varphi_{v21} = V_1^* \cdot 1.04$$

$$\varphi_{v22} = V_1^* \cdot 2.18$$

$$\varphi_{t21} = V_1^* \cdot 1.035$$

$$\varphi_{t22} = V_1^* \cdot 1.16$$

$$\psi_{11} = V_1^* \cdot 3.55$$

$$\psi_{12} = V_1^* \cdot 4.06$$

$$\psi_{v11} = V_1^* \cdot 0.5$$

$$\psi_{v12} = V_1^* \cdot 1.04$$

$$\psi_{t11} = V_1^* \cdot 0.5$$

$$\psi_{t12} = V_1^* \cdot (-0.22)$$

$$\psi_{21} = V_1^* \cdot (-1.58)$$

$$\psi_{22} = V_1^* \cdot (-2.24)$$

$$\psi_{v21} = V_1^* \cdot (-0.23)$$

$$\psi_{v22} = V_1^* \cdot (-0.65)$$

$$\psi_{t21} = V_1^* \cdot (-0.24)$$

$$\psi_{t22} = V_1^* \cdot 0.14$$

$$\omega_{p1} = V_1^* \cdot 12.15 \cdot 10^4$$

$$\omega_{p2} = V_1^* \cdot 13.86 \cdot 10^4$$

$$\varphi_{p1} = V_1^* \cdot 1.74 \cdot 10^4$$

$$\varphi_{p2} = V_1^* \cdot 3.61 \cdot 10^4$$

$$\psi_{p1} = V_1^* \cdot 1.73 \cdot 10^4$$

$$\psi_{p2} = V_1^* \cdot (-0.8 \cdot 10^4)$$

მოცემული პარამეტრებისთვის (4.15) სისტემა ამოხსნილია შებრუნებული მატრიცის ხერხით და გამოყენებული პროგრამა MATLAB-ი

### მატრიცების ელემენტების მნიშვნელობები

სიმეტრიის გათვალისწინებით უცნობთა რაოდენობა იქნება ხუთი ( $M_{ti} = 0$ ).

### ვარიანტი "ა"

B =

$$\begin{vmatrix} 12.15 \cdot 10^4 \cdot V_1 \\ 13.86 \cdot 10^4 \cdot V_1 \\ 1.73 \cdot 10^4 \cdot V_1 \\ 3.61 \cdot 10^4 \cdot V_1 \\ -0.8 \cdot 10^4 \cdot V_1 \end{vmatrix}$$

X =

$$\begin{vmatrix} x_1 = 118.1 \\ x_2 = -58.2 \\ x_3 = 373 \\ x_4 = 1487 \\ x_6 = 1125 \end{vmatrix}$$

## ვარიანტი "ბ"

B =

$$\begin{vmatrix} 12.15 \cdot 10^4 \cdot V_1^* \\ 13.86 \cdot 10^4 \cdot V_1^* \\ 1.73 \cdot 10^4 \cdot V_1^* \\ 3.61 \cdot 10^4 \cdot V_1^* \\ -0.8 \cdot 10^4 \cdot V_1^* \end{vmatrix}$$

X =

$$\begin{vmatrix} x_1 = 118.1 \\ x_2 = -58.2 \\ x_3 = 373 \\ x_4 = 1487 \\ x_6 = 1125 \end{vmatrix}$$

ჩალუნვა სამკუთხა ფირფიტის C (3; 3) წერტილში

ვარიანტი "ა"

$$\begin{aligned}
 W(3; 3) &= P_1 \cdot W_{c1} + 2P_2 W_{c2} + M_{v1} W_{vc1} + 2M_{v2} W_{vc2} + 2M_{t2} W_{tc2} + P \cdot W_{cc} = \\
 &= \left( P_1 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} + 2P_2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} + \right. \\
 &+ M_{v1} \left( 5 \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) + \\
 &+ 2M_{v2} \left( 7 \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) + \\
 &+ 2M_{t2} \left( 7 \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) + \\
 &+ P \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \left. \right) \cdot V_1 = \\
 &= V_1 (118 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi 5}{10} - 2 \cdot 58.2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} \cdot 7 \cdot \sin \frac{\pi 3}{10} + \\
 &+ 373.1 \left( 5 \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{5\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) + \\
 &+ 2 \cdot 1487 \cdot \left( 7 \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos 45^\circ + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) + \\
 &+ 2 \cdot 1125 \cdot \left( 7 \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot (-\cos 45^\circ) + \sin \frac{3\pi}{10} \cdot 3 \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cos 45^\circ \right) + \\
 &+ 5.9 \cdot 10^4) = V_1 \cdot 69965 = 2.83 \cdot 10^{-10} \cdot 69965 (\text{მ}) = 0.0198 (\text{მმ})
 \end{aligned}$$

ვარიანტი "ბ"

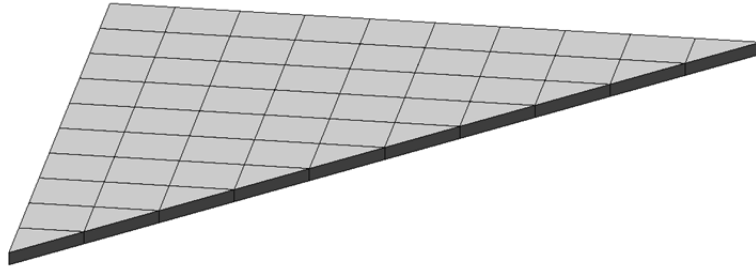
$$W^*(3; 3) = V_1^* \cdot 69965 = 3.03 \cdot 10^{-10} \cdot 69965 (\text{მ}) = 0.0212 (\text{მმ})$$

განსხვავება  $W(3; 3)$  და  $W^*(3; 3)$ -ს შორის 7%-ია.

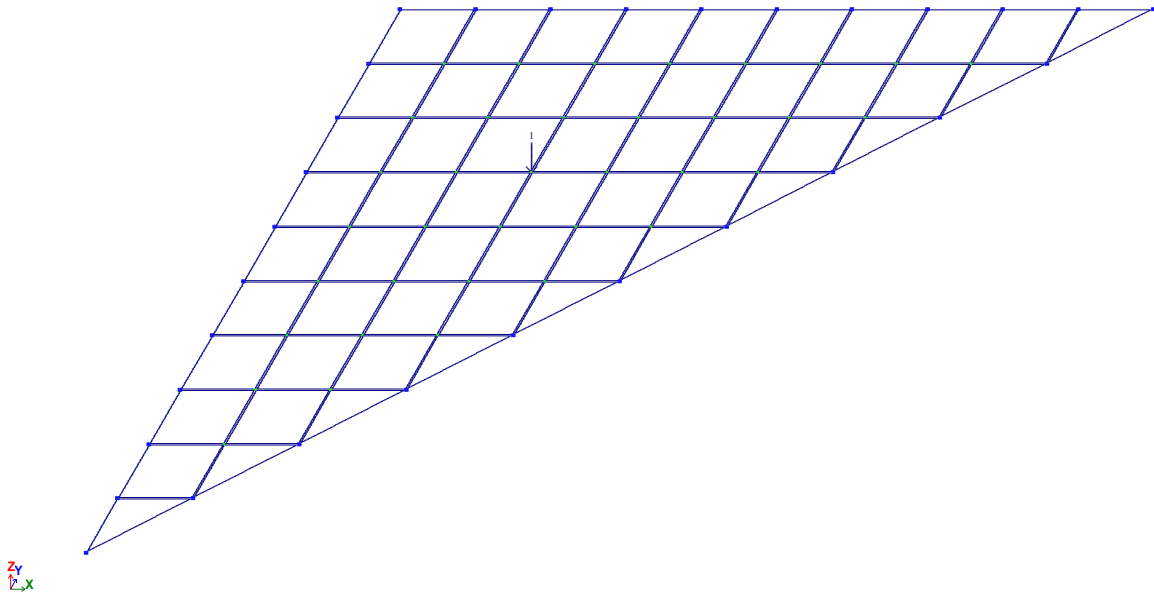
შედარების მიზნით იგივე ამოცანა გადაწყვეტილია სასრული ელემენტების მეთოდითაც. გამოყენებულია პროგრამული კომპლექსი ЛИРА (ПК ЛИРА).

(როცა ფირფიტა ჩამაგრებულია  $x, y, z, U_x, U_y, U_z$ )

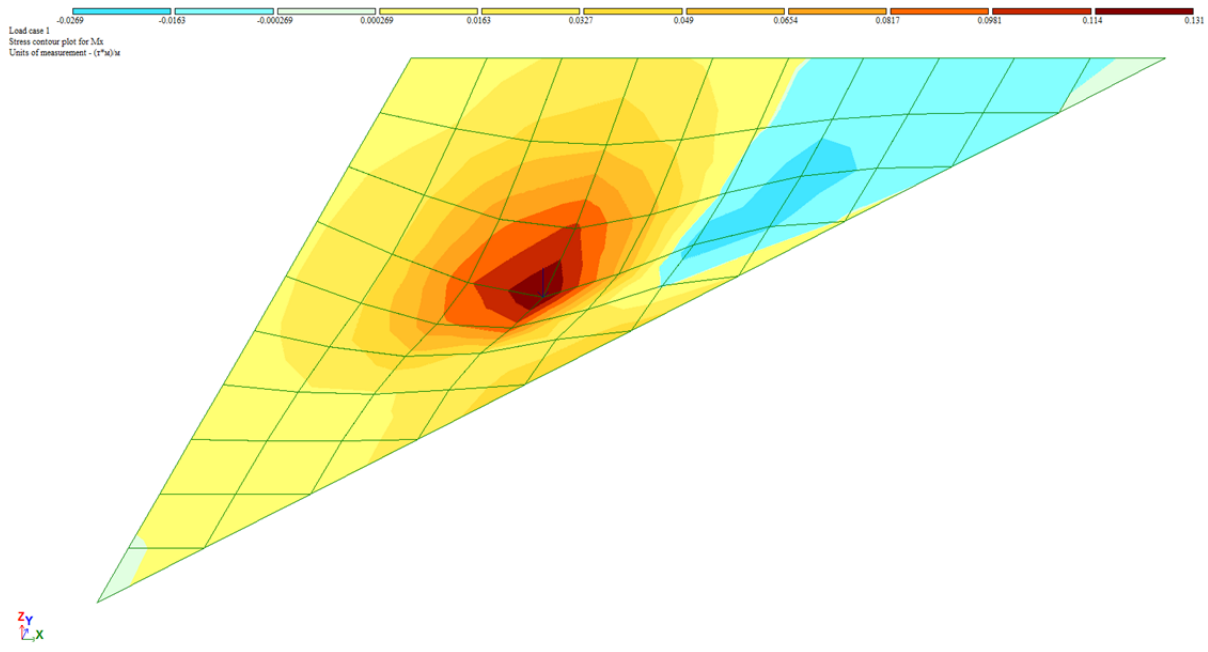
$$Z = -0.0205 \text{ მმ}$$



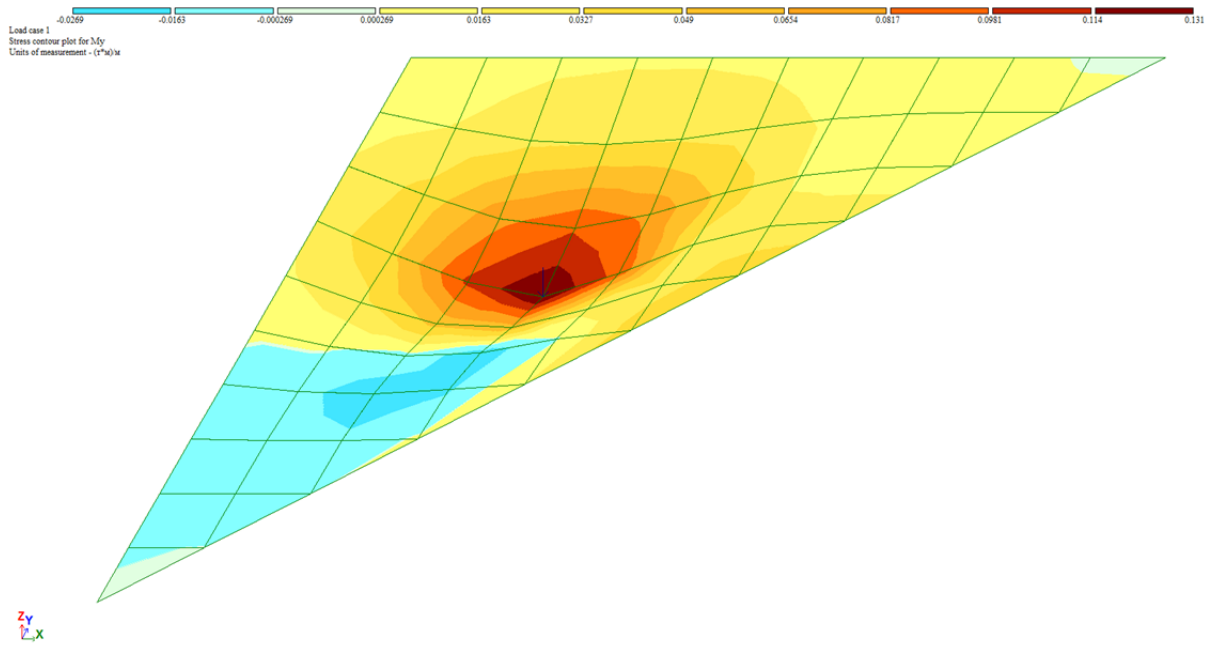
სურ. 4.1 საანგარიშო სივრცითი მოდელი



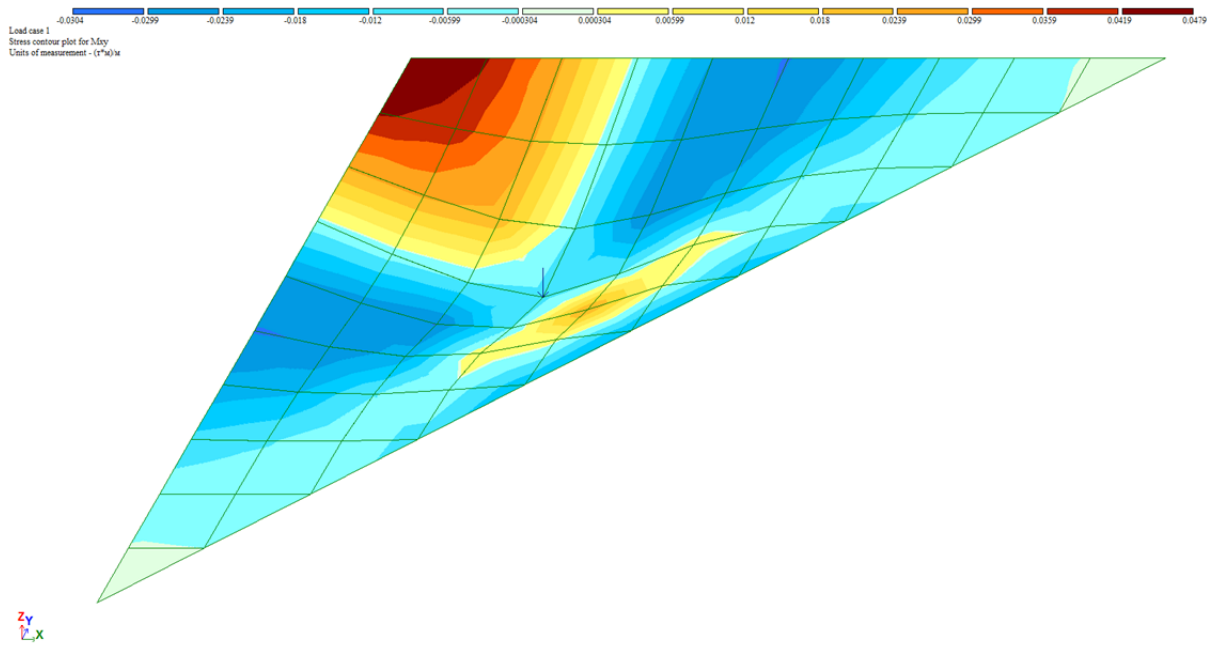
სურ. 4.2 საანგარიშო სქემა



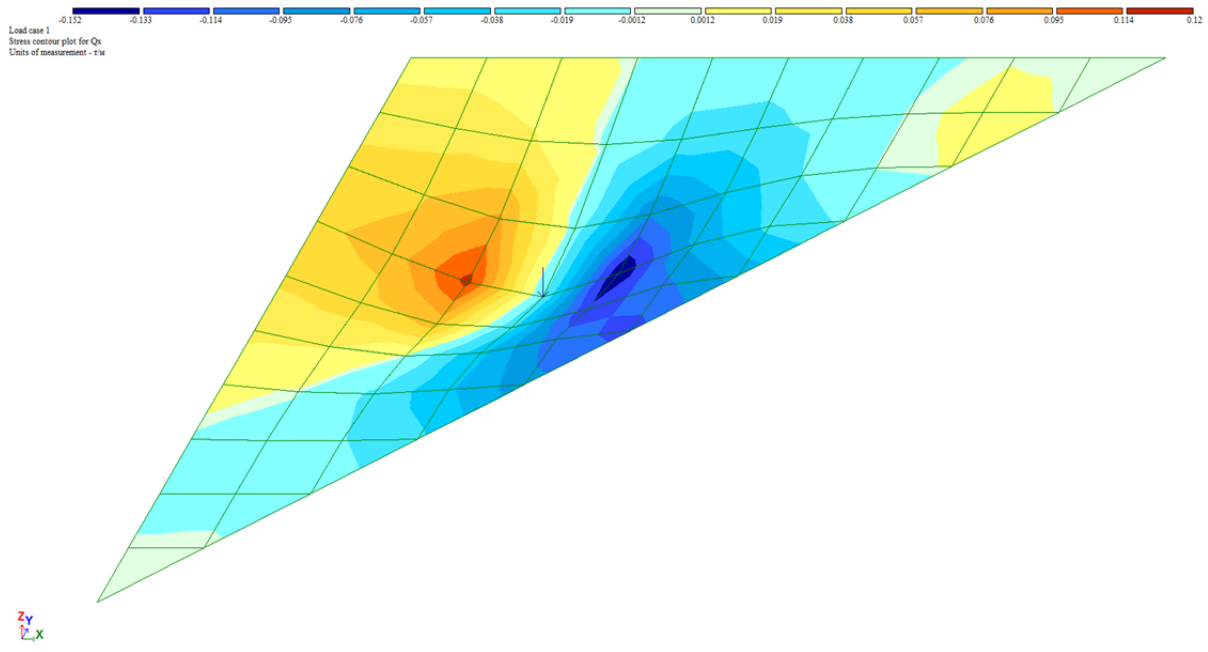
სურ. 4.3 მლუნავი მომენტები  $M_x$  ღერძის მიმართ



სურ. 4.4 მლუნავი მომენტები  $M_y$  ღერძის მიმართ

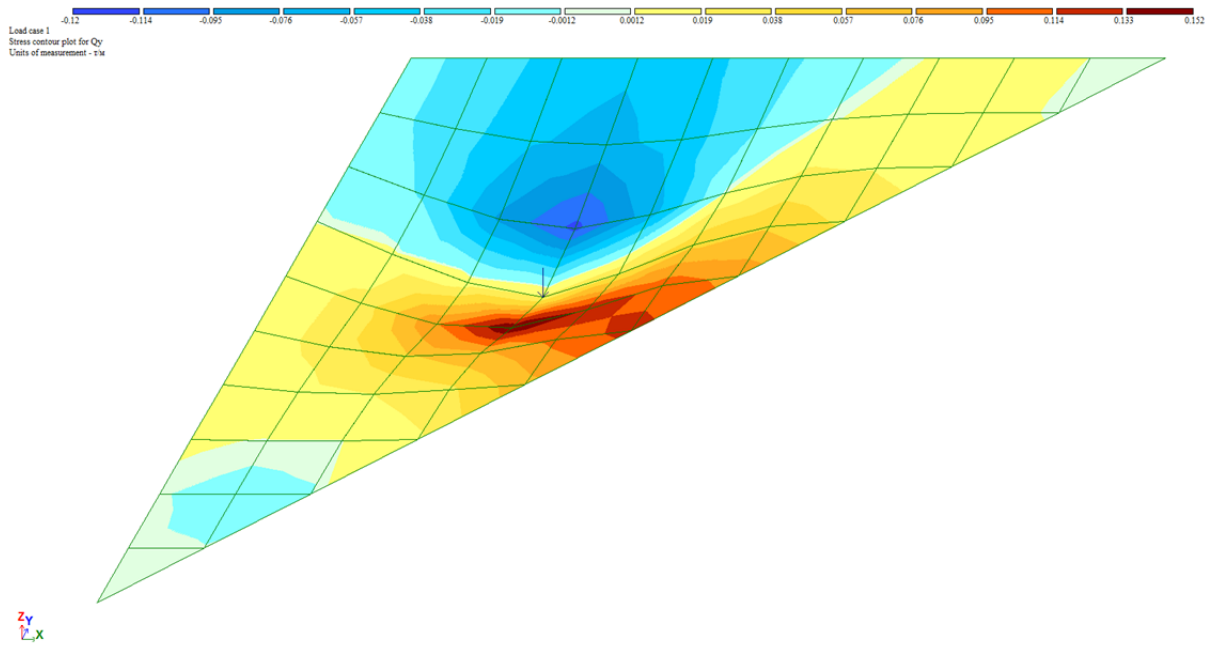


სურ. 4.5 მღუნავი მომენტები  $M_{xy}$

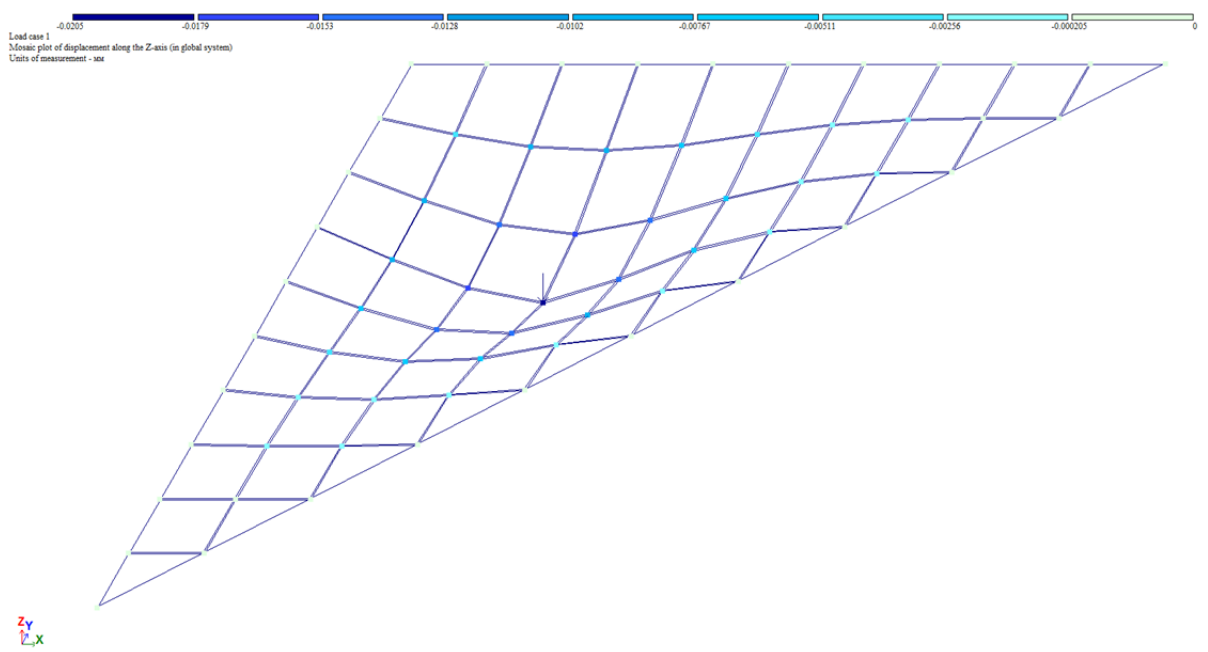


სურ. 4.6 განივი ძალა  $Q_x$





სურ. 4.7 განივი ძალა Qy



სურ. 4.8 გადაადგილება Z ღერძის მიმართულებით (-0.0205 მმ)

## დასკვნა

მართკუთხა ფირფიტების განივი ღუნვის ამოცანები გადაწყვეტილია რიტცის ენერგეტიკული მეთოდით. დეფორმაციის პოტენციური ენერჯის განსაზღვრისათვის გამოყენებულია ახალი მოდიფიცირებული (დაზუსტებული) გამოსახულება, შედგენილი რ. ჭყოიძის მიერ (სხვებთან თანაავტორობით).

ნათქვამის საფუძველზე მეთოდი, რომელიც ზემოთ აღნიშნულ გარდაქმნას ითვალისწინებს შეიძლება განხილული იქნას, როგორც დაზუსტებული რიტცის ენერგეტიკული მეთოდი.

ერთგვაროვანი იზოტროპიული მართკუთხა ფირფიტისათვის სასაზღვრო პირობების სხვადასხვა შემთხვევაში (კონტურზე სახსრულად დაყრდნობილი; სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი და მეოთხე გვერდი თავუსუფალი) დაზუსტებული ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით შედგენილია დაზუსტებული გრინის გავლენის ფუნქციები. ძალთა მეთოდით (მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდი) გადაწყვეტილია სამკუთხა ფირფიტის (როგორც რთულკონტურიანის) განივი ღუნვის ამოცანა. ძირითად სისტემად მართკუთხა ფირფიტის და კანონიკურ განტოლებების შესადგენათ ფირფიტის შესაბამისი დაზუსტებული გრინის გავლენის ფუნქციების გამოყენების საფუძველზე ჩამოყალიბდა რთულკონტურიანი ფირფიტების გაანგარიშების დაზუსტებული ძალთა მეთოდი.

განხილულია რიცხვითი მაგალითები. გამოყენებულია როგორც კლასიკურ მექანიკაში არსებული მეთოდები ისე იგივე მეთოდები დაზუსტებული გამოსახულებებით.

შედეგებში განსხვავება მნიშვნელოვანია.

## გამოყენებული ლიტერატურა

1. Люжин О.В. Статический и динамический расчет балок, рам, плит и оболочек приемом “расширения” заданной системы. Сб. “Исследования по теории сооружений”, Вып. XIII, Изд. Литературы по строительству, : 1964. 25 с.
2. Р. Чкоидзе, И. Степнадзе „Построение функции влияния Грина для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по трем и свободной по четвертой стороне“ Научно-технический журнал “Строительство”, #4 (35), Тбилиси, 2014 г.
3. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. “Высшая школа”, М.: 1990. 49 с.
4. ნ. შ. ბერიშვილი, რ. შ. გორგობიანი, რ.ვ. ჭყოიძე „ზოგიერთი მოსაზრება ჰუკის განზოგადებული კანონისა და დრეკადი პოტენციალის შესახებ“ სამეცნიერო-ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“, #2 (5), თბილისი, 2007 წ.
5. ნ. შ. ბერიშვილი, რ.ვ. ჭყოიძე, რ. შ. გორგობიანი „ჰუკის განზოგადებული კანონის კრიტიკული ანალიზი“ პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, #1 (33), თბილისი, 2009 წ.
6. Р. Чкоидзе, И. Степнадзе „Построение функции влияния Грина для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по трем и свободной по четвертой стороне“ Научно-технический журнал “Архитектура и строительство в Азербайджане” #2 (5). Баку, 2015
7. Р. Чкоидзе, И. Степнадзе „Построение функции влияния Грина для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по контуру“ Научно-технический журнал “Строительство”, #2 (37), Тбилиси, 2015 г.
8. Р. Чкоидзе, И. Степнадзе „Расчет пластины треугольного очертания в плане“ Научно-технический журнал “Строительство”, #3 (38), Тбилиси, 2015 г.